EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

december 10

nr 3

jaargang 86

Computerexamens VMBO-KB 2010

In memoriam: Pierre van Hiele

Algebra op het scherm

Op weg naar IMO2011

We worden ouder…

Ludolph van Ceulen (1540-1610)

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

december
10
nr 3
jaargang 86

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom,
Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Kerstnummer

Een rijk geschakeerd blad ligt op uw schoot. Soms ontstaat er 'bij toeval' een thema in een nummer, maar dit keer niet: we hebben een grote verscheidenheid aan onderwerpen. Een lekker blad voor de kerstvakantie dunkt me, naast uiteraard de Kerstpuzzel en het Kerstcryptogram uit de geëigende bladen. Puzzelliefhebbers kunnen trouwens ook weer in *Euclides* hun hart ophalen want Frits Göbel laat u weer flink piekeren in zijn puzzelrubriek.
Dit derde nummer verschijnt ná de studiedag van 6 november jl. Misschien had u op een mooi fotoverslag gehoopt, of de jaarrede van Marian Kollenveld nog eens rustig willen lezen. Helaas, dit nummer was al in productie en daarom vindt u een terugblik op de studiedag pas in nummer 4. Maar wat dan wel?

Inhoud

Allereerst een 'in memoriam' over Pierre van Hiele, geschreven door Harrie Broekman. Pierre van Hiele, internationaal bekend vakdidacticus, vooral bekend van zijn niveautheorie, is 101 jaar geworden. Een jaar geleden werd een symposium georganiseerd om zijn honderdste verjaardag te vieren, waarover u hebt kunnen lezen in het maartnummer.
Verder treft u de laatste aflevering in de serie artikelen over Ludolph van Ceulen aan: een mooi slotstuk uit de pen van Jan Hogendijk (klinkt toch nog steeds beter dan 'van het toetsenbord van', vindt u niet?). Ik wil hier graag alle auteurs die hebben meegewerkt aan deze serie, bedanken voor hun interessante artikelen. Het was een waar genoegen een blik te kunnen werpen op leven en werk van de rekenmeesters rond 1600. Met onze andere serie – die over opgaven uit de IMO – naderen we het jaar 2011, het jaar waarin de IMO in Nederland zal plaatsvinden; in dit nummer een bijdrage van Wouter Zomervrucht met een meetkundeopgave uit 2007.
Als oude bekende treft u ook weer Sieb Kemme – helaas voor hem, gelukkig voor ons, nog steeds geen minister of staatssecretaris. Nu heeft hij tenminste tijd om te blijven schrijven.
En twee artikelen over de ontwikkelingen rond het wiskundeonderwijs in het digitale tijdperk. Een interview met Martijn Slob, brein achter AlgebraKIT, een oefenprogramma voor het trainen van algebraïsche vaardigheden. Daarnaast nog een artikel over het samenwerkingsproject van FIsme en EPN, waarin algebra met de computer centraal stond; het is geschreven door Paul Drijvers en Nora Driekus.
Een onderwerp dat de gemoederen in wiskundeonderwijsland weliswaar bezig houdt, maar tot nu toe niet tot actie noopt, is de 'kunst van het verwaarlozen'. Jeroen Spandaw schrijft erover en volgens hem moeten ook wiskundeleraren wat meer gaan 'benaderen' en hun wiskundige 'gevoeligheden' achterwege laten als het over modelleren gaat. Mocht u de voorkeur geven aan lekker wiskundig fijngevoelig doen, zoek dan het artikel van Paul Dillo over een generatie incirkels of dat van Daaf Spijker over ouder worden.
Als laatste, maar niet minder belangrijk: ik ben blij dat Dorien Lugt er weer is met een nieuwe aflevering in haar column Differentialen en Diepvriespizza's. Hoe vruchtbaar kan een samenwerking zijn?

Opnieuw: de examens

Uiteraard, het hoort ook bij de inhoud van dit nummer, maar ik reserveer er toch een aparte alinea voor, omdat het me verheugt dat we kunnen publiceren: twee bijdragen over de pilot die gedaan is met het digitale kader-examen. In mijn Kort Vooraf in nummer 2 kondigde ik het al aan: er is toch een digitaal kader-examen vrijgegeven door het CvE zodat er door het Cito een reflectie geschreven kon worden. Melanie Steentjes heeft dat voor haar rekening genomen en u kunt dan ook weer een degelijke analyse van dit examen vinden. Mijns inziens is het zeer zinvol hiervan kennis te nemen. Als aanvulling schrijft Karen Ruedisueli over haar ervaringen met dit examen: een persoonlijke impressie, mede op grond van de ervaringen van haar leerlingen.

Rest mij nog…

u een heerlijke kerstvakantie te wensen – met hopelijk niet te veel schoolexamens om na te kijken en veel leesgenoegen.
In een film die ik pas zag, vroeg een Boeddhistische monnik: 'Wat is belangrijker: duizend wensen vervullen of één wens overwinnen?' Deze vraag houdt me bezig, er zit meer perspectief in dan je op eerste gezicht zou vermoeden.
Ik wens u alvast een heel gelukkig nieuwjaar.

Inhoud

Pilot computerexamens vmbo-KB 2010

[Melanie Steentjes]

In 2006 is gestart met computerexamens voor de algemene vakken van vmbo-BB. Inmiddels maakt zo'n 90% van de BB-leerlingen het centraal examen op de computer. In 2010 is er gestart met een pilot voor computerexamens bij vmbo-KB. In dit artikel wordt verslag gedaan van deze pilot wat betreft het vak wiskunde.

Uitdagingen

Een examen op de computer heeft zo zijn voordelen. Om er een paar te noemen: leerlingen krijgen steeds een beperkte hoeveelheid tekst te zien, sommige antwoorden kunnen automatisch worden gescoord en een context kan soms beter geïntroduceerd worden aan de hand van een kort filmpje dan met behulp van veel tekst.

Bij wiskunde komen er echter ook direct problemen om de hoek kijken. Traditiegetrouw zijn we niet tevreden met alleen een antwoord op een vraag. Het zou het maken van een computerexamen wel een stuk eenvoudiger maken: 40 meerkeuzevragen en klaar ben je. Bij wiskunde hechten we echter zeer aan de berekening die een leerling maakt. Welke denkstappen zet hij? Als er ergens een rekenfout wordt gemaakt, hoeft dat niet te betekenen dat zo'n leerling direct geen punten meer voor de vraag krijgt. We rekenen door met zijn foute tussenantwoord en geven punten voor een juiste redenering. Maar hoe krijgt een leerling zijn berekening in de computer?

Het invoeren van wiskundige berekeningen in de computer is meer dan het invoeren van platte tekst. Er moeten ook vaak speciale tekens en symbolen gebruikt worden. Bij vmbo-BB wordt gewerkt met een *symbolenbakje*. In dit symbolenbakje zit bijvoorbeeld het euro-teken, maar ook tweede en derde machten (zie [1]). Maar bij de overgang van vmbo-BB naar vmbo-KB heb je ineens te maken met behoorlijk complexere berekeningen, denk maar aan goniometrische verhoudingen of de stelling van Pythagoras. Een docent schreef in een eerder nummer van *Euclides* over het computerexamen wiskunde bij vmbo-BB: 'Ook technisch is een digitaal examen moeilijker dan een papieren examen. Bijvoorbeeld als ze kubieke meter moeten intikken. Dat is te lastig. (…) De laatste keer was er zelfs een tool voor gemaakt [het symbolenbakje (MS)], maar het leidt af. De leerlingen zijn, hup, uit de vraag en uit hun concentratie.' [2]

Mocht het bij vmbo-BB nog meevallen door de relatief eenvoudige berekeningen, bij het examen wiskunde voor vmbo-KB konden we er niet zomaar overheen stappen.

Oplossingen?

Ons allereerste idee was het ontwikkelen van een eenvoudige formule-editor. Maar al snel kwamen er bezwaren. Kunnen KB-leerlingen wel met een formule-editor werken? Hoe eenvoudig ook, ze zullen er toch mee moeten oefenen. Hoe inzichtelijk kunnen we zo'n editor maken? Vanuit toetstechnisch oogpunt kwamen er bezwaren: Wat toets je? Toets je of een leerling een vraag kan beantwoorden of toets je (mede) of hij met een formule-editor kan omgaan? Geeft dit geen zogenaamde ruis? Zijn leerlingen niet, net als bij het symbolenbakje zoals de docent schrijft, 'Hup, uit de vraag en uit hun concentratie'?

Daarnaast moet een leerling bij een berekening twee dingen doen: eerst zijn berekening invoeren op zijn eigen rekenmachine en vervolgens hetzelfde nog eens overtypen in de formule-editor. Dit is naast vervelend voor de leerling ook zeer foutgevoelig.

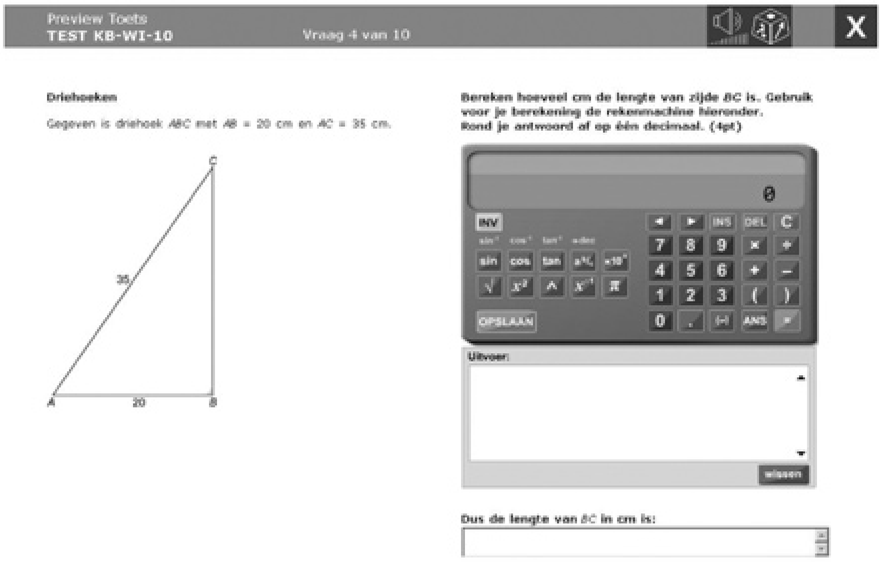
Computerrekenmachine

Dit laatste bezwaar gaf echter direct ingang naar een mogelijke oplossing: een rekenmachine die tussenstappen opslaat. Dat nam de bovengenoemde bezwaren voor een groot deel weg. Het idee was dat we een rekenmachine zouden ontwikkelen die zoveel mogelijk overeenkomt met de rekenmachines die momenteel gebruikt worden binnen vmbo-KB. Dat betekende dat de bediening relatief eenvoudig voor ze zal zijn. Een leerling blijft op deze manier binnen de 'flow' van de opgave. Het laatste bezwaar, het tweemaal intypen van zijn berekening, was op deze manier ook van de baan.

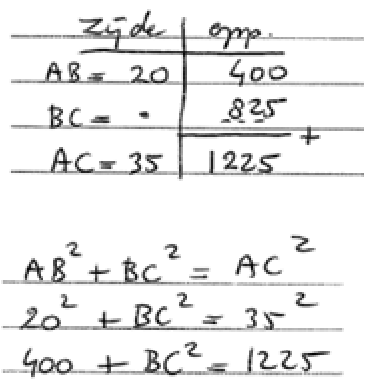
Omdat de tijd inmiddels vorderde en er in april 2010 wel een computerexamen wiskunde moest liggen, zijn we van start gegaan met de ontwikkeling van deze computerrekenmachine. De computerrekenmachine is zo ontworpen dat hij ongeveer hetzelfde werkt als de rekenmachines die op dit moment worden gebruikt in het vmbo. Tests bij leerlingen vmbo-KB in het najaar van 2009 wezen uit dat leerlingen weinig tot geen moeite hebben met de bediening van deze rekenmachine. Leerlingen bleken echter geregeld te vergeten om op de knop 'opslaan' te drukken en daarnaast gebruikten zij hun kladpapier weinig of niet. Om die reden hebben we naast een voorbeeldexamen ook extra oefenopgaven ontwikkeld. Dit materiaal is in een voorlichtingsbijeenkomst in februari 2010 voor bij de pilot betrokken docenten gedemonstreerd en toegelicht. ***In figuur 1*** staat een voorbeeld uit de set oefenopgaven.

Veel leerlingen werken met een tabel als hun gevraagd wordt met behulp van de stelling van Pythagoras een derde zijde te berekenen. Of zij schrijven eerst de stelling van Pythagoras op. Omdat leerlingen bij het computerexamen alleen een rekenmachine en een invoerveld voor zich zien, zijn zij geneigd om direct met de computerrekenmachine aan de slag te gaan en die eerste stap niet meer te maken.

Om die reden is het goed om de leerlingen erop te wijzen dat ze hun kladpapier moeten gebruiken. Op dit kladpapier kunnen zij het begin van hun uitwerking schrijven; zie, als bijvoorbeeld, ***figuur 2***. De berekeningen voeren zij vervolgens uit op de computerrekenmachine. En daar komt dan bijvoorbeeld iets te staan als ***in***



figuur 1 Voorbeeld uit de oefenopgaven



figuur 2

figuur 3

figuur 3. Het uiteindelijke, afgeronde, antwoord 28,7 vullen zij in in het daarvoor bedoelde antwoordveld. Op die manier kan de docent, zonder de gebruikelijke tabel of eerste denkstap te zien, het antwoord van de leerling corrigeren.

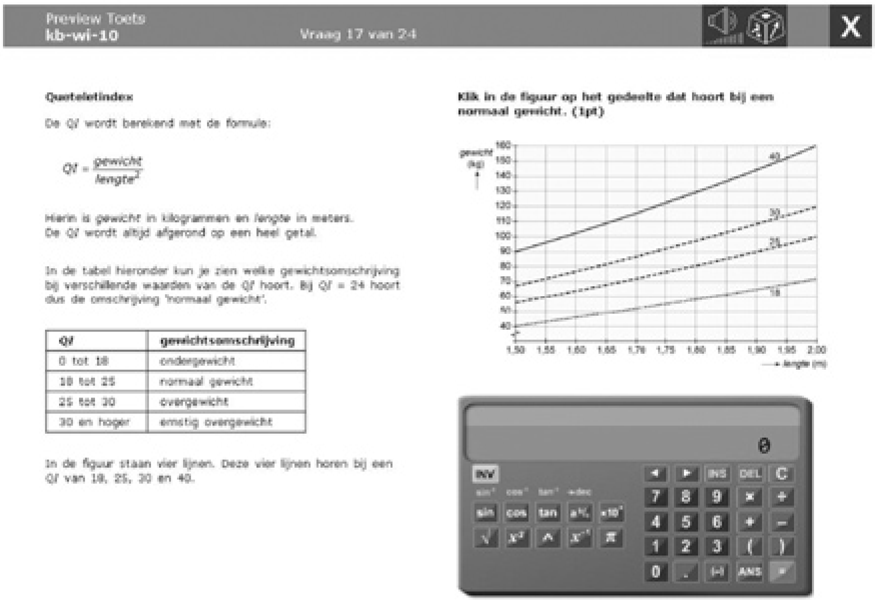
Computerexamen 2010

Er zijn verschillende varianten van het computerexamen. In dit artikel bespreken we één variant, die vanaf half januari 2011 te vinden zal zijn op de website van Cito (*www.cito.nl* - Centrale examens - Digitale examens vmbo). Deze variant is gemaakt door 1269 leerlingen. ***In tabel 1*** [VMBO-KB 2010 digitaal], zie pag. 104, is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden. De p'-waarde is de waargenomen score als percentage van de maximumscore. Het examen bestond uit 24 vragen, waarvoor in totaal 60 punten behaald konden worden. Leerlingen kregen 120 minuten de tijd om het examen te maken. Het examen startte met de context *Cruiseschip*. Binnen deze context moest er gerekend worden met knopen, procenten en afstand. Bij vraag 2 moest een woordformule gemaakt worden door het slepen van verschillende elementen (***zie figuur 4***).

figuur 4 Uit: VMBO-KB 2010 (Cruiseschip)

Dit ging de leerlingen betrekkelijk goed af met een p'-waarde van 76. Op papier worden dit soort vragen vaak een stuk minder goed gemaakt. Het is goed denkbaar dat leerlingen minder moeite met deze vraag hadden omdat er bij deze applicatie voor gekozen is de structuur van de formule al te geven.
De volgende context, *Tjirpende krekels*, werd met een gemiddelde p'-waarde van 68 ook goed gemaakt. De context draaide om een formule waarmee de temperatuur berekend kan worden als het aantal tjirpen in 14 seconden bekend is. De laatste vraag was een meerkeuzevraag. Leerlingen moesten uit vier formules de juiste omgekeerde formule kiezen. De p'-waarde bij deze vraag was 42, maar uit verdere gegevens blijkt dat de vraag niet echt goed discrimineerde: leerlingen met een hoge score op het hele examen scoorden niet echt beter op deze vraag dan leerlingen met een lage score op het hele examen. De gokkans zal invloed gehad hebben.
De context *Vakantiehuis* bestond uit vijf vragen, waarin meetkunde aan de orde kwam. Bij vraag 11 moesten leerlingen met behulp van goniometrie aantonen dat de lengte van een zijde gelijk was aan 2,6 meter was. Opvallend is de relatief hoge p'-waarde van 63. In het afgelopen papieren examen stonden twee vragen waarbij met goniometrie gerekend moest worden. Beide vragen hadden een p'-waarde lager dan 30 (zie [3]). Waarom leerlingen zo veel beter gescoord hebben op een soortgelijke vraag in dit computerexamen, kan meerdere oorzaken hebben. Allereerst moesten ze aantonen dat een zijde een bepaalde lengte had. Daardoor hadden ze meer mogelijkheden om tot het goede antwoord te komen. Ook konden ze naar het antwoord toerekenen. Een andere reden kan zijn dat leerlingen zich niet druk hoefden te maken over de notatie van het antwoord. Ze voerden hun berekening in op de computerrekenmachine en dat volstond als antwoord.
In vraag 13 werd gevraagd naar de inhoud van het vakantiehuis. Het vakantiehuis bestond uit twee delen: een zeszijdig prisma met daarop een zeszijdige piramide. Dit vonden leerlingen lastig, gezien de p'-waarde van 33. Wel discrimineerde deze vraag heel goed. De laatste vraag, waarin gevraagd werd hoeveel keer zo groot het oppervlakte van de vloer wordt als de zijden twee keer zo lang zijn, scoorde heel slecht. 22% van de leerlingen vulde hier niets in. Met een p'-waarde van 14 was het de lastigste vraag van het examen.
Net als bij het papieren examen scoorden leerlingen ook bij het computerexamen het best bij de context *Quetelet-index*. De vier vragen bij deze context waren in grote mate hetzelfde als de vier vragen in het papieren examen. Dit is interessant, omdat dan bekeken kan worden in hoeverre er verschil is tussen de scores van leerlingen op het papieren examen en op het computerexamen. ***In tabel 1*** [VMBO-KB 2010 digitaal] staan de p'-waarden van het papieren examen ook vermeld. Opvallend

is het verschil in p'-waarden bij de vragen 16 en 17. Bij beide vragen scoorden de leerlingen bij het computerexamen beter. Bij vraag 16 kan dit verklaard worden doordat het correctievoorschrift bij het computerexamen iets soepeler is dan bij het papieren examen. Bij het computer-examen staat expliciet dat invullen in plaats van inklemmen ook goed gerekend mag worden. Bij vraag 17 moesten leerlingen in een figuur het gedeelte aangeven dat hoort bij een normaal gewicht (***zie figuur 5***).
In het papieren examen moesten leerlingen dit inkleuren. In het computerexamen konden leerlingen klikken op een gebied en dat werd dan rood gekleurd. Dit laatste is een stuk minder arbeidsintensief. Maar of dat er nu voor zorgt dat de p'-waarde zoveel hoger ligt? Waarschijnlijk heeft het er mee te maken dat je bij deze applicatie alleen gebieden kon kleuren. Je kon wel meerdere gebieden kleuren, maar je kon bijvoorbeeld geen lijnen kleuren, een fout die leerlingen bij het papieren examen wel konden maken, en die ook gemaakt is. Ongewild werd door de applicatie dus voorkomen dat leerlingen een bepaalde fout maakten.
De context *Zwembad* was met een gemiddelde p'-waarde van 42 de lastigste context van het examen. De drie vragen van deze context maakten wel een heel goed onderscheid tussen vaardige en minder vaardige leerlingen. Bij vraag 20 moest uitgerekend worden wanneer het zwembad gevuld is, ervan uitgaande dat je een emmer van 13 liter in 22 seconden vult. Een lastige vraag waarbij gerekend moest worden met eenheden. Maar liefst 52% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt.
Bij de laatste context, *Puzzelkubus*, werd expliciet gebruik gemaakt van kleur, iets wat bij een papieren examen niet mogelijk is. Wel werd in de evaluatiebijeenkomst aangegeven dat leerlingen die kleurenblind waren, moeite hadden met de laatste vraag. Hier moet bij de constructie beter op gelet worden.



figuur 5 Uit: VMBO-KB 2010 (Quetelet-index)

Evaluatie

Docenten en leerlingen die meegedaan hebben aan de pilot, konden na afloop een enquête invullen. Ook is er een evaluatiebijeenkomst geweest op 31 mei voor docenten. Omdat de computerrekenmachine een nieuwe fenomeen is, zijn daarover ook een aantal vragen gesteld.
Uit de enquête (ingevuld door 152 leerlingen) bleek dat 74% van de leerlingen de voorkeur geeft aan een computerexamen. Ze vinden het in het algemeen prettig dat er maar één opgave tegelijkertijd te zien is. Ook is hun de vraag gesteld of de computerrekenmachine voldoende mogelijkheden biedt om hun uitwerking op te schrijven. 85% vindt van wel of staat er neutraal in.
Van de docenten wiskunde die de enquête hebben ingevuld (32), geeft 66% de voorkeur aan een computerexamen. De computerrekenmachine vond men in het algemeen goed functioneren. Ook is hun de vraag gesteld of de opgeslagen berekeningen in de computerrekenmachine voldoende houvast bieden om de vaardigheden van de leerlingen te kunnen beoordelen. 34% van de docenten geeft aan dat ze niet voldoende houvast hebben. Ook vindt (diezelfde?) 34% dat leerlingen niet voldoende mogelijkheden hebben om hun uitwerking op te schrijven met de computerrekenmachine.

Vervolg

De pilot wordt uitgebreid. In 2011 zullen zo'n 200 scholen (dit is ca. 50% van alle scholen) meedoen aan de KB-pilot. In deze pilot zal nog steeds gebruik gemaakt worden van de computerrekenmachine bij het examen wiskunde. Deze computerrekenmachine is wel aangepast naar aanleiding van het commentaar op de evaluatiebijeenkomst. Zo wordt nu alleen de laatste regel gewist als een leerling op de knop 'wissen' drukt. En er komt in de uitvoer een komma bij decimale getallen. Op dit moment zijn we bezig met een vervolg op de computerrekenmachine. Het idee is dat leerlingen met de nieuwe applicatie ook tabellen kunnen maken, rekenpijlen kunnen gebruiken en driehoekjes kunnen schetsen. We hopen deze applicatie in het computerexamen van 2012 te kunnen inzetten.

Tabel 1 - VMBO-KB 2010 digitaal

opgave	Cruiseschip					Krekels				Vakantiehuis					Quetelet index				Zwembad			Rubiks kubus		
vraagnr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
max. score	1	2	2	3	3	2	3	3	1	2	4	3	4	2	2	3	1	2	3	5	4	1	1	3
p'-waarde	77	76	69	71	48	87	62	70	42	56	63	51	33	14	95	82	85	84	69	29	39	79	36	79
overlap met papier															93	71	69	85						

Noten

[1] Han Belt (2009): *Examen vmbo-BB 2009, 1e tijdvak*. In: *Euclides* 85(2), oktober 2009.
[2] Joke Verbeek (2009): *Digitale eindexamens wiskunde: een uitkomst of een ramp? / Interview met Jaap van Braak, wiskundedocent vmbo-BB*. In: *Euclides* 85(2), oktober 2009.
[3] Ger Limpens e.a. (2010): *Examens wiskunde 2010, 1e tijdvak*. In: *Euclides* 86(1), september 2010.

Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundemedewerker en toetsdeskundige van Cito te Arnhem (website: *www.cito.nl*).
E-mailadres: *melanie.steentjes@cito.nl*

Computerexamens wiskunde voor de KB'ers

[Karen Ruedisueli]

28 april 2010 / 12:30-14:30 uur KB-examen wiskunde

Gisteren de BB'ers, vandaag de KB'ers… Ik zie het nut niet van een KB-examen op de computer, maar misschien verander ik na vandaag wel van mening. Dat is wel vaker zo. Ik moet het altijd eerst even zien en dan laten inwerken. Daarna denk ik: 'Heb ik me hier druk om gemaakt?'

Het examen bestaat uit 24 vragen waarvan we er 17 zelf na moeten kijken.
De eerste leerlingen hadden slechts 30 minuten nodig en na 1½ uur was iedereen klaar, zelfs de trage leerlingen en dyslecten. Het examen had dus wel langer gemogen. Iedereen was aanwezig voor het examen en er was niets geks aan de hand.

Zwembad

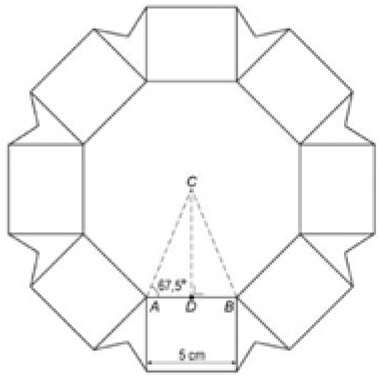
De eerste vraag ging over het berekenen van de inhoud van een zwembad. Deze hadden ze allemaal wel goed.
Bij de tweede vraag moesten de leerlingen berekenen hoe lang het duurde voordat het bad vol was. Deze vraag vonden de meeste toch wel moeilijk.
De vragen die daarna over het zwembad kwamen, vonden sommige leerlingen erg pittig. Ze moesten het aantal emmers chloor berekenen. Hier moesten ze een berekening in vier stappen voor maken. De zwakkere jongens zagen niet waar ze moesten beginnen of snapten niet wat er van ze gevraagd werd.

Formules en grafieken

De volgende vragen gingen over het invullen van formules; voor sommigen blijft het lastig, maar de opgave was goed te doen.
Ze moesten op meerdere decimalen afronden; helaas, doordat er zoveel tekst wordt gebruikt, net als bij het BB-examen, lezen ze hier overheen. Zeker de dyslecten. Ook hier valt me op dat tekstbegrip zo belangrijk is. Wanneer leerlingen tijdens het examen iets vroegen over de tekst, omdat ze het niet begrepen, moest ook ik het even goed lezen. Soms meerdere keren. Ik ben ook dyslectisch, misschien ligt het daaraan, maar makkelijker taalgebruik zou prettig zijn en minder tekst. We geven toch wiskunde en geen Nederlands?
Het gebruik van een hogere macht dan 2 op het rekenmachinetje van het examen vonden ze moeilijk. Het rekenmachinetje vonden ze sowieso wennen. Sommige leerlingen zijn vergeten hun berekeningen op te slaan. Ze moesten namelijk om een berekening op te slaan een speciale toets gebruiken na het [=]-teken. Als je dit niet gewend bent, kun je dat makkelijk vergeten. Eén leerling is heel vaak vergeten zijn berekeningen op te slaan, erg sneu, zo mist hij heel veel punten. Je kunt bij deze jongen zien dat hij te snel heeft gewerkt door de zenuwen.
Eigenlijk zou, als je op het [=]-teken drukt, alles opgeslagen moeten worden, en niet pas wanneer je op de knop OPSLAAN drukt; dan kun je het ook niet vergeten.
Je zou eigenlijk ook een deel van een berekening moeten kunnen verwijderen; dit kan nu namelijk niet. Heb je één van de vijf stappen in een berekening fout en wil je de laatste stap verwijderen, dan moet je alles wissen en de vraag opnieuw beginnen.
Bij het volgende onderdeel, grafieken, moesten de leerlingen een goede schaalverdeling op de y-as kiezen en 7 punten goed plaatsen. Dit is een goed alternatief voor zelf een grafiek op papier tekenen, maar nog steeds vind ik dat er niets boven het werken op papier gaat. Deze vraag had iedereen wel goed.

Snoepdoos

Daarna ging het over lijn- en draaisymmetrie van een snoepdoosje. Dit hebben we in de 3e klas voor het laatst besproken. Bij onze methode komt dit onderwerp niet voor in het 4e-klas boek, dus sommige leerlingen wisten dit niet zo goed meer.
Lijnsymmetrisch ging dan nog wel, maar draaisymmetrisch vonden ze helemaal moeilijk. De helft heeft deze vraag wel aardig gemaakt.
Na de vraag over symmetrie kwam goniometrie aan bod (***zie figuur 1***). Ze moesten de hoogte van een driehoek berekenen. Dit was voor de meesten ook goed te doen.
Ik moet zo halverwege het examen zeggen dat het me niet tegenvalt. Er zitten goede opdrachten in.



figuur 1 Uit: VMBO-KB 2010 / Laat zien dat de lengte van CD afgerond 6 cm is.

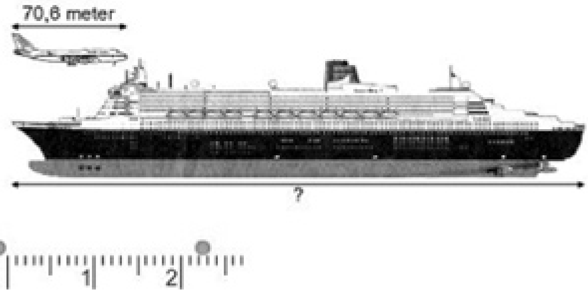
De inhoud van het snoepdoosje berekenen met een achthoekig grondvlak vonden ze erg lastig, terwijl ze toch best wel wat tips hadden gekregen bij de opgave.

Cruiseschip

Na goniometrie kwam weer het onderwerp formules. Ze moesten bij een verhaaltje zelf de formule maken. Ze moesten vier van de zeven vlakjes gebruiken (***zie figuur 4 op pag. 103***). Makkie dus.
Je had vier mogelijkheden, dus echt fout kon het niet gaan.
Vervolgens kwamen de procenten aan bod. Dit ging aardig goed. Weer moesten ze goed lezen.
Ik heb wel het idee dat alle onderdelen goed aan bod kwamen, al hadden er in mijn ogen wel meer goniometrie-vragen in gemogen. Eén vraagje is wat minimaal, terwijl het er in de test veel meer waren. Bij vraag 16

Cruiseschip

De 'Queen Mary 2' is enorm groot. Hieronder zie je het zijaanzicht van de 'Queen Mary 2' en van een Boeing 747. De zijaanzichten zijn op dezelfde schaal getekend.



figuur 2 Uit: VMBO-KB 2010 / Met liniaal

ging het over tijden en snelheid per uur. Ze moesten hiermee uitrekenen hoeveel dagen een schip erover zou doen om van New York naar South Hampton te gaan. Wel een leuke opgave. Had het merendeel ook goed.
Daarna ging het over rekenen met een schaal (***zie figuur 2***). Dit vonden de leerlingen en ik een onduidelijke vraag. Ik kreeg veel vragen over wat de bedoeling was.
1,3 cm = 70,6 m; had 1,7 of 1,8 genomen nu twijfelden ze of het echt 1,3 of 1 moest zijn. Ze waren bang het verkeerd te doen. Ze dachten dat het misschien 1 cm = 70,6 m moest zijn in plaats van 1,3 cm = 70,6 m, maar ze hebben gelukkig op de correcte manier verder gerekend. De liniaal die ze moesten gebruiken, was ook niet echt duidelijk.

Puzzelkubus

Verder moesten ze in een bovenaanzicht aangeven hoeveel blokjes er op elkaar stonden bij een figuur (***zie figuur 3***).
Ze hadden bij deze opgave een voorbeeld gedaan van een andere figuur. Super makkelijk dus.

De laatste vragen kostten wel even gekraak van de hersens, maar het zat er op dus sommigen namen daar echt even de tijd voor en weer anderen vonden het best en sloten de computer gewoon af.
Hoe het KB-examen gemaakt is? Het valt me mee, vergeleken met de proef op de som. Deze test was namelijk verschrikkelijk gemaakt, zelfs door de besten.

De minder goeden zullen nooit een ster worden en dat had ik ook niet verwacht. Ze scoren het hele jaar al rond de 5,0.
Nu wachten tot 16 juni tot de normering binnen komt. Voor de leerlingen en docenten een spannende tijd.

IJs

Gisteren fietste een 4-KB-leerling met me mee op en ze had een heel goed gevoel. Ze vroeg me dingen over het examen, maar ik zei al dat ik niets zou zeggen, ik was bang haar alleen maar zenuwachtig te maken en haar haar goede gevoel misschien wel te laten verliezen. Dat wilde ik niet, en dat snapte ze.
We zijn op het einde van al haar examens een heerlijk ijsje gaan eten tussen school en ons dorpje.

Puzzelkubus

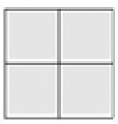
Op de foto zie je de onderdelen van een puzzelkubus. Als je de onderdelen op de juiste manier in elkaar zet krijg je een kubus. De onderdelen zijn aan elkaar gelijmde blokjes van 1 bij 1 bij 1 cm.

Hieronder staat een bovenaanzicht van onderdeel A met daarin aangegeven hoeveel blokjes er op elkaar staan.

3	1
1	1

Onderdeel B bestaat uit 7 blokjes. Hieronder staat het bovenaanzicht van onderdeel B.

Geef in het bovenaanzicht van onderdeel B aan hoeveel blokjes er op elkaar staan. (2pt)



figuur 3 Uit: VMBO-KB 2010 (Puzzelkubus)

Over de auteur
Karen Ruedisueli is docente wiskunde aan de SGM, VMBO-scholengemeenschap in Maarsbergen.
E-mailadres: *ruedisueli@sgmaarsbergen.nl*

In memoriam: Pierre Marie van Hiele

4 MEI 1909-1 NOVEMBER 2010

[Harrie Broekman]

Pierre van Hiele, altijd observerend

Op honderdeneenjarige leeftijd overleed na een kort ziekbed de (voormalig) wiskundeleraar, wiskundedidacticus, leerboekauteur en (vakdidactisch) onderzoeker Pierre van Hiele.
Geboren en opgegroeid in Amsterdam, werkte hij als leraar in Overveen, Bilthoven en Voorburg. Als scholier was hij al bezig met het helpen van jongere leerlingen 'wiskunde te leren'. Vanaf die tijd was hij ook al dusdanig kritisch op het beschikbare lesmateriaal dat hij pogingen ondernam om *aangepast/verbeterd* materiaal te ontwikkelen. Dit leidde o.a. tot de latere leerboekserie *Van A tot Z.* Het was tevens de aanzet tot het levenslang bestuderen van het leren 'redeneren' in de wiskunde. Pierre van Hiele gaf ruim 40 jaar les aan 12- tot 18-jarigen, en bleef de daarbij opgedane ervaringen benutten bij het denken over en het werken aan een verdere theorievorming. Dit leidde tot vele publicaties waarin hij zijn ideeën over 'niveaus' verder ontwikkelde.
Pierre heeft zijn hele werkzame leven laten inspireren door het observeren van lerenden; maar daarenboven het beschrijven en doordenken van die observaties. Hij hanteerde daarbij zeer nadrukkelijk het principe dat het leerproces dient aan te sluiten bij de intuïtieve, informele wiskunde die lerenden hebben geleerd door eigen experimenten. Motivatie speelde daarbij een belangrijke rol. In 1954 schreef hij dienaangaande al:
'Noodzakelijk is, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van wiskunde laat beleven en hen er gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen.'
Het aansluiten bij intuïtieve, informele kennis gold voor hem evenzeer voor de ontwikkeling van een vakdidactiek. Daarbij gold z.i. – en geldt nog steeds – dat we wel verder kunnen komen dan het louter intuïtieve door gebruik te maken van wetenschappelijk onderzoek. In zijn eigen woorden uit 1959:
'De gedachte, die aan al mijn voordrachten van de laatste jaren ten grondslag ligt, is, dat er een discussie mogelijk is over het lesgeven, anders dan op basis van intuïtie.'
Van zijn hand verschenen veel invloedrijke Nederlandstalige artikelen in de tijdschriften *Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs*, *Pedagogisch Tijdschrift*, *Pedagogische Studiën*, en vooral *Euclides*. Daarnaast ook een enkel artikel in *Educational Studies in Mathematics*, *Didaktik der Mathematik* en *Teaching Children Mathematics*.
Van de door hem geschreven boeken zijn vooral *Struktuur*, *Begrip en Inzicht* en het Engelstalige *Structure and Insight* niet alleen uit historisch opzicht van belang, maar ook als bron voor het denken over wiskundeonderwijs . Het laatst genoemde boek heeft – samen met enkele papers op internationale conferenties – geleid tot het bekende fenomeen van 'de man die in niet-Nederlands sprekende landen soms meer bekendheid leek te genieten en meer nagevolgd werd dan in zijn eigen land'. De vele studies in de voormalige Sovjet Unie en de USA die gebaseerd zijn op het werk van Pierre en zijn vrouw Dieke van Hiele-Geldof (1911-1958), kunnen daarvan getuigen.
In de jaren negentig gaf Pierre nog steeds voordrachten in Australië, Nieuw Zeeland en Zuid Afrika, waar hij nog geëerd werd met een eredoctoraat.
Op het vorig jaar door de Universiteit Twente georganiseerde symposium ter ere van zijn honderdste verjaardag bleek dat er ook in Nederland een hernieuwde belangstelling is voor het werk van Van Hiele. Dit geldt met name voor dat deel van zijn studies waarin hij een visie ontwikkelt over *niveaus in het denken,* respectievelijk *niveaustruktuur in de argumentatie,* inclusief het niveau-gebonden-taalgebruik. De Van Hiele-niveaus worden tegenwoordig niet alleen geïllustreerd met voorbeelden uit de meetkunde, maar ook met rekenen en algebra (waar als eerste zijn belangstelling lag). Pierre en zijn vrouw bewonderden de research methoden van Piaget – observeren en luisteren – maar deelden de conclusies van Piaget, dat wiskundig begrip ontwikkelt door 'ouder worden' of door 'natuurlijke groeiprocessen', zeker niet. Al vrijwel vanaf zijn allereerste publicaties benadrukt hij – geïnspireerd door de praktijk van het lesgeven – het belang van het (gefaseerde) leren van kinderen, ondersteund door zorgvuldig samengesteld materiaal en de begeleiding door een goede docent.
Al degenen die met Pierre gewerkt hebben, zullen hem herinneren als een 'volhardende' onderzoeker met uitgesproken meningen en – vooral – een man met veel passie. Iets dat hij graag nog had beleefd, is een wiskundecurriculum gebaseerd op vectoren (samen bundeling van het visueel/meetkundige en het rekenkundig/algebraïsche). Als hij maar even de kans kreeg promootte hij dat idee, maar het vond – tot zijn teleurstelling – nooit voldoende aanhang.
Ofschoon hij nu niet meer in ons midden is, zijn Pierre's ideeën nog steeds even intrigerend als 50 jaar geleden en zal hij nog vaak geciteerd worden.

Van Ceulen tegen de wiskunde van Scaliger

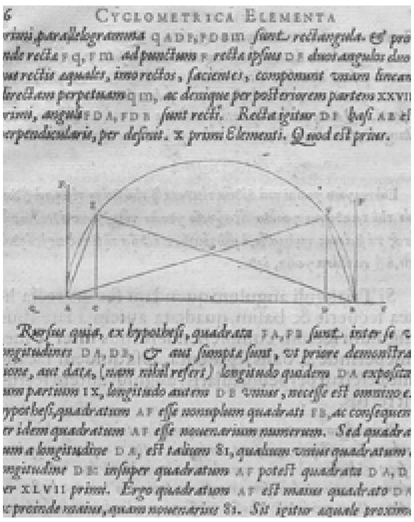
[Jan Hogendijk]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die steevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Er zijn drie redenen waarom we van mening zijn dat van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden: zijn werk ademt een werklustige frisheid en dat maakt hem tot een ideaal rolmodel voor leerlingen van tegenwoordig; het kijken naar de problemen waar wiskundigen in zijn tijd mee worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu; en tenslotte leren we over de 17e eeuw doordat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties onderhield met zijn omgeving. Met het onderstaande artikel sluiten we, nu het jaar 2010 bijna voorbij is, deze achtdelige serie af.

In 1593 werd aan de Universiteit van Leiden een Europese toponderzoeker benoemd. Joseph Justus Scaliger (1540-1609) werd in Agen (in Frankrijk) geboren, en ontwikkelde zich als universeel geleerde. Hij is vooral bekend vanwege zijn bijdragen aan de chronologie en de klassieke en Oosterse talen, maar rekende ook de wiskunde tot zijn werkterrein. Wiskunde moest volgens hem gedaan worden door een *mathematicus*, dat wil zeggen, iemand die Latijn en Grieks beheerste en goed bekend was met de werken uit de oudheid, zoals de *Elementen* van Euclides. Maar Scaliger was zeker niet afkerig van innovatie in de wiskunde en hij had scherpe kritiek op Archimedes.

Joseph Scaliger (1540-1609)

Al voor zijn benoeming in Leiden had Scaliger aangekondigd dat hij de drie klassieke problemen uit de Griekse wiskunde had opgelost: de trisectie van de hoek, de constructie van twee middenproportionalen, en de kwadratuur van de cirkel. In juni 1594 publiceerde hij zijn *Cyclometrica Elementa Duo* [5] (Elementen van de Cirkelmeting in twee delen) bij uitgeverij Raphalengius in Leiden. Het boek was opgedragen aan de Staten van Holland, Westvriesland en Zeeland en schitterend vormgegeven. De meeste tekst is gedrukt in zwarte inkt maar de figuren worden in rood weergegeven en ook de letters in de tekst die punten in de figuren aanduiden. De stellingen zijn klassiek Grieks geformuleerd



figuur 1 Uit: Cyclometrica

met Latijnse vertaling, en de bewijzen zijn in het Latijn (***zie figuur 1***).

In deel 1van zijn boek bewijst Scaliger onder andere dat het kwadraat van de omtrek van een cirkel gelijk is aan 10 keer het kwadraat van de middellijn. In moderne notatie wil dit zeggen dat de omtrek van een cirkel met straal *r* gelijk is aan $2\pi_1 r$ met $\pi_1 = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ (***zie Kadertekst 1 op pag. 110***). Deel 2 bevat de eigenlijke kwadratuur (oppervlaktebepaling) van de cirkel: de oppervlakte van de cirkel is $\frac{6}{5}$ maal de oppervlakte van de ingeschreven zeshoek. In moderne termen betekent dit resultaat dat de oppervlakte van een cirkel met straal r gelijk is aan $\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot r^2\sqrt{3} = \pi_2 r^2$ met $\pi_2 = \frac{9}{5}\sqrt{3} = 3{,}117\ldots$

Het bewijs is moeilijk te doorgronden doordat Scaliger allerlei nieuwe en curieuze termen invoert. Een voorbeeld is zijn 'segment van de zeshoek'. Dit is niet een gedeelte van een zeshoek, maar een van de zes cirkelsegmenten die overblijven als de ingeschreven zeshoek uit een cirkel wordt verwijderd. Zes 'segmenten van een zeshoek' zijn volgens de cirkelkwadratuur van Scaliger gelijk aan $\frac{1}{5}$ van de oppervlakte van de zeshoek zelf, en daarom is de oppervlakte van de cirkel volgens hem ook gelijk aan 36 'segmenten van de zeshoek'.

Archimedes had bewezen dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan, in moderne termen, het product van de straal en de halve omtrek (dus $\pi_1 = \pi_2$), maar omdat hij dit uit het ongerijmde bewees, werd zijn bewijs door Scaliger niet geaccepteerd. Scaliger waarschuwde zijn lezers voor de verderfelijke invloed van bewijzen uit het ongerijmde op jonge mensen.

De waarde $\pi_1 = \sqrt{10}$ ligt niet binnen de grenzen $3\frac{10}{71} < \pi_1 < 3\frac{1}{7}$ die Archimedes had aangegeven, maar Scaliger verklaarde dit doordat Archimedes deze grenzen niet op wetenschappelijke maar op 'tirannieke' manier had gevonden.

In de *Cyclometrica* maakte Scaliger zijn lezers ook tot deelgenoot van allerlei andere interessante ontdekkingen die hij had gedaan, zoals een constructie van de regel-

matige zevenhoek met passer en liniaal (***zie Kadertekst 2 op pag.110***), en een constructie van een koordenvierhoek met gegeven zijden.

Scaliger's boek verscheen in juni 1594, en dankzij Adriaan van Roomen (1561-1615), een vriend van Van Ceulen, weten we wat daarna gebeurde. Van Ceulen kende geen Latijn, maar blijkbaar had iemand het boek meteen na verschijning voor hem vertaald. Van Ceulen werkte het boek in minder dan twee weken door en vond een groot aantal fouten, en nu ontstond het probleem hoe hij deze onder de aandacht van de hooggeleerde kon brengen. Dit was een delicate kwestie vanwege het standsverschil: Van Ceulen was slechts een schermleraar en rekenmeester zonder academische vorming en hij kende geen Latijn. Via een tussenpersoon die het Latijn wel machtig was (wellicht de jonge Willebrord Snellius (1580-1626) die leerling was van zowel Van Ceulen als Scaliger), deelde Van Ceulen aan Scaliger mee welke fouten hij in het boek had ontdekt. Verder raadde hij Scaliger aan zijn boek uit de handel te laten nemen om zijn eer te beschermen. Scaliger verwaardigde zich niet hierop in te gaan, met het argument dat Van Ceulen slechts een vechtersbaas was en de titel van 'mathematicus' onwaardig. Aangezien een mathematicus volgens Scaliger veel tijd nodig zou hebben om zijn boek door te werken, had de schermleraar Van Ceulen het onmogelijk in twee weken kunnen begrijpen. Van Ceulen probeerde nog een paar keer Scaliger te waarschuwen, zonder resultaat.

In 1596 verscheen Van Ceulen's eigen boek *Vanden Circkel*[3], dat al onderwerp is geweest van eerdere bijdragen in *Euclides* (zie [6] en [8]). Van Ceulen noemt in dit boek de namen van diverse personen met wie hij goede relaties heeft, maar niet de naam van Scaliger. Voor de goede verstaander moet desondanks duidelijk geweest zijn dat hoofdstuk 21 van *Vanden Circkel* helemaal tegen Scaliger gericht is. Van Ceulen begint met te laten zien dat de oppervlakte van de cirkel gelijk is aan het product van halve omtrek en straal. Dus geldt in moderne termen $\pi_1 = \pi_2$, zoals Archimedes ook al had aangetoond. Daarna laat Van Ceulen zien dat de cirkelomtrek kleiner is dan $\sqrt{10}$ maal de middellijn, en dat de oppervlakte van de cirkel kleiner is dan 36 'segmenten van de zeshoek', en zelfs kleiner dan 35 van zulke segmenten.

Dan begint een tussenhoofdstukje (zie [4]) met antwoorden van Van Ceulen op 16 'konstighe stucken' die hem voorgelegd waren door een 'hoogh-gheleerdt Man' met een 'door-luchtigh verstandt'. Van Ceulen behandelt deze man met uiterste beleefdheid, en vermeldt dat hij 'niet weynigh' van deze 16 konstighe stucken (d.w.z. wiskundige stellingen) geleerd heeft. Van Ceulen laat zien dat de eerste 13 stellingen correct zijn, en nummer 14 en 15 ook correct mits een kleine verbetering wordt gemaakt. In stelling 16 zegt de anonieme hooggeleerde dat de cirkel gelijke oppervlakte heeft als 36 'segmenten van de zeshoek'. De hooggeleerde had een bewijs toegevoegd dat door Van Ceulen wordt geciteerd, en dat eindigt met de mededeling dat iedereen die 'tamelijk mathematicus' is, dit bewijs moet kunnen begrijpen. Vervolgens weerlegt Van Ceulen stelling 16 en maakt nog enkele opmerkingen over de zevenhoek en de koordenvierhoek, kennelijk ook naar aanleiding van de *Cyclometrica Elementa* van Scaliger.

In de negentiende eeuw schreef David Bierens de Haan diverse artikelen over Van Ceulen en Scaliger[1]. Bierens de Haan nam aan dat de hooggeleerde man, die door Van Ceulen met zoveel respect bejegend werd, Van Ceulen's vriend Adriaan van Roomen geweest is. Echter, Van Roomen kan niet in stelling16 geloofd hebben, omdat hij zelf in 1597 een weerlegging van de cirkelkwadratuur van Scaliger publiceerde. Van Ceulen moet met de anonieme hooggeleerde Scaliger zelf hebben bedoeld. Blijkbaar voelde Scaliger zich toch wat onzeker door de kritiek van Van Ceulen en heeft daarom zijn 16 'konstighe stucken' aan Van Ceulen voorgelegd.

In *Vanden Circkel* bekritiseert Van Ceulen de wiskunde van Scaliger, maar niet de persoon. Voor een oppervlakkige lezer neemt Van Ceulen een beleefde en nederige houding aan. De goede verstaander kan wel een paar snieren in de tekst vinden; zo stelt Van Ceulen: 'Maar den ghenen die willen / ende gheen verstandt hebben van desen / die moghen mijn onordentlijck ende simpel maniere van schrijven verachten / de reste sal voor haer-luijden bestaende blijven'. Hij bedoelt hier dat schrijvers, zoals Scaliger, die taalkundig beter geschoold zijn, op de stijl van *Vanden Circkel* kunnen neerkijken, maar ook voor hen blijft de wiskunde in *Vanden Circkel* geldig.

Ook van andere wiskundigen kreeg Scaliger kritiek te verduren. Van Ceulen was daarbij bijzonder omdat hij de enige was die in dezelfde stad woonde als Scaliger zelf. Scaliger is vermoedelijk het meeste bezeerd door de kritiek van de Franse wiskundige François Viète (1540-1603). Deze schreef al in 1594 een humoristische Latijnse tekst[7] waarin hij de stijl van Scaliger bewust imiteerde en niet alleen zijn wiskunde maar ook zijn nieuwe termen (zoals 'segment van een zeshoek') belachelijk maakte.

Scaliger gaf op een gegeven moment wel toe dat hij kleine fouten in zijn kwadratuur gemaakt had, maar hij bleef geloven dat het eindresultaat correct was. In december 1594 publiceerde hij een Appendix op de *Cyclometria*, maar verder reageerde hij niet rechtstreeks op zijn critici. Wel luchtte hij zijn hart in brieven aan diverse niet-wiskundige vrienden in het buitenland (zie [2]). Hieruit blijkt dat hij in zijn eigen gelijk bleef geloven. Zijn gedachten volgen steeds hetzelfde patroon: Scaliger vindt dat hijzelf meer voor de wetenschap gedaan heeft dan wie dan ook. Hij steekt zijn nek uit om innovatieve dingen te publiceren, zoals de cirkelkwadratuur, en dus moet hij accepteren dat hij niet begrepen wordt. Hij heeft zoveel nieuws in de meetkunde ontdekt dat dit aan iedere andere meetkundige onsterfelijke roem zou brengen, maar voor Scaliger zelf betekenen zulke ontdekkingen niet veel. Zijn tegenstanders zijn boosaardig en incompetent. Het zijn ofwel algebraïci, die nergens van afweten, of mensen die bekend zijn met praktische zaken zoals fortificaties, maar niet geschoold zijn in de theoretische meetkunde van Euclides. In elk geval zijn het geen 'mathematici' met klassieke scholing. En af en toe klaagt Scaliger dat er geen enkele mathematicus in Leiden woont (behalve hijzelf). Maar Scaliger heeft geduld. Hij heeft nieuwe argumenten om aan te tonen dat zijn cirkelkwadratuur correct is, en zijn tegenstanders zullen afdruipen met het schaamrood op de kaken. Zijn tijd komt nog wel. Aldus Scaliger.

Scaliger is nog steeds beroemd vanwege zijn bijdragen aan de klassieke en Oosterse talen. Er is in de universiteitsbibliotheek in Leiden een Scaliger-instituut en elk jaar wordt een Scaliger-lezing gegeven. In de wiskunde is Scaliger's tijd nooit gekomen. Scaliger's indrukwekkende *Cyclometria Elementa Duo* doet denken aan de nieuwe kleren van de keizer in het sprookje van Andersen.

De inhoud van *Vanden Circkel* van Van Ceulen is nu, na vier eeuwen, nog net zo correct als toen het boek verscheen.

Literatuur

Zie [4] voor een meer gedetailleerde lijst.

[1] David Bierens de Haan (1878): *Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden*. In eigen beheer uitgegeven. Digitale versie: « *www.dbnl.org/tekst/bier009bouw01_01/* ».

[2] Paul Botley, Dirk van Miert (2011): *The Correspondence of Joseph Justus Scaliger*. Genève: Droz; 7 delen.

[3] Ludolph van Ceulen (1596): *Vanden Circkel*. Delft: Jan Andriesz. Digitale versie: « *http://gdz.sub.uni-goettingen.de* ».

[4] Jan P. Hogendijk (2010): *The scholar and the fencing master: the exchanges between Joseph Justus Scaliger and Ludolph van Ceulen on the circle quadrature (1594-1596)*. In: *Historia Mathematica* 37; pp. 345-375.

[5] Joseph Scaliger (1594): *Cyclometrica Elementa Duo*. Lugduni Batavorum: Apud Franciscum Raphelengium. Digitale versie: « *http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de* ».
Scaliger's beide andere wiskundige werken *Mesolabium* en *Appendix ad Cyclometrica Sua* verschenen ook in 1594 bij dezelfde uitgeverij.

[6] Jaap Top (2010): *Vijfendertig decimalen*. In: *Euclides* 85(7); pp. 270-272.

[7] François Viète: *Munimen adversus nova cyclometrica, seu Antipelekus*. Paris, 1594. Herdrukt in F. Vièta: *Opera mathematica in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio Francisci à Schooten*. Leiden, 1646; pp. 436-446. Digitale versie: « *http://gallica.bnf.fr/* ».

[8] StevenWepster (2009): *Ludolph vanCeulen (1540-1610) / In de ban van de cirkel*. In: *Euclides* 85(3); pp. 98-101.

Website

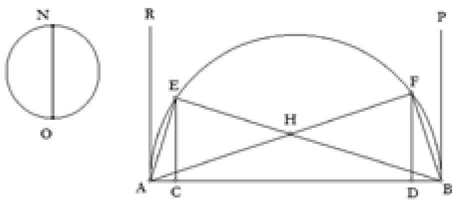
www.ludolphvanceulen.nl

Over de auteur

Jan Hogendijk werkt aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Zijn onderzoeksinteresses zijn geschiedenis van de wiskunde en aanverwante wetenschappen in het Islamitisch cultuurgebied en in Nederland tot ca. 1850. Zie voor meer informatie « *www.jphogendijk.nl* ».
E-mailadres: *J.P.Hogendijk@uu.nl*

Kadertekst 1

Scaliger's bewijs van de stelling dat het kwadraat van de omtrek van een cirkel gelijk is aan 10 keer het kwadraat van de middellijn ($\pi_1 = \sqrt{10}$; zie [5], pp. 31-33).
Scaliger bekijkt een cirkel met middellijn *NO*; ***(zie figuur 2)***. Hij tekent de rechte *AB* gelijk aan de omtrek van de cirkel, en construeert een halve cirkel met middellijn AB. Hij kiest $DB = \frac{1}{10} AB$, trekt een loodlijn *DF* en verbindt *FB* en *FA*. Dan kiest hij punt *E* op de cirkel zodat *BE* = 3*NO*; dit is mogelijk omdat $\pi_1 > 3$. Hij trekt de loodlijn *EC*, en verbindt *EB* en *EA*. Punt *H* is het snijpunt van *BE* en *AF*. Tot slot construeert hij loodlijnen *PB* en *RA* op *AB*.
De driehoeken *AFB*, *FDB* hebben twee gelijke hoeken (want hoeken *F* en *D* zijn recht en hoek *B* is gemeenschappelijk) en zijn daarom gelijkvormig. Dus geldt $AB : BF = BF : BD$, en daarom is $AB : BD = AB^2 : BF^2$. We concluderen $AB^2 = 10BF^2$, en met de stelling van Pythagoras volgt $AF^2 = 9BF^2$, zodat $AF = 3BF$.
Omdat $\angle EHA = \angle FHB$ en beide hoeken $\angle HEA$, $\angle HFB$ recht zijn, volgt $\angle EAH = \angle FBH$. Ook de beide hoeken *RAB* en *PBA* zijn recht, dus volgt:
$\angle RAE + \angle FAB = \angle PBF + \angle EBA$.
Omdat $\angle PBF = \angle BFD$ en $\angle RAE = \angle AEC$ volgt nu:
$\angle AEC + \angle FAB = \angle BFD + \angle EBA$
Maar $\angle AEC = \angle EBA$ en $\angle FAB = \angle BFD$.
Dus $\angle FAB = \angle EBA$.
De driehoeken *FAB*, *EBA* hebben twee gelijke hoeken en een gelijke zijde *AB*, en zijn dus congruent. Uit *AF* = 3*FB* volgt daarom *BE* = 3*EA*. Omdat *BE* = 3*NO* volgt nu *FB* = *EA* = *NO*. Tenslotte is $AB^2 = 10BF^2$, dus $AB^2 = 10NO^2$. Hetgeen te bewijzen was.

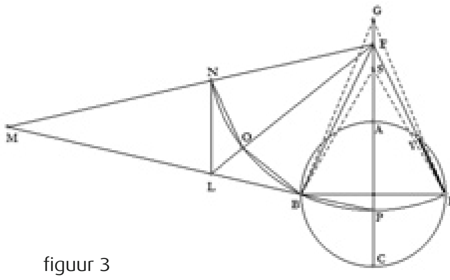


figuur 2

In *Vanden Circkel* verwijst Ludolph van Ceulen naar deze constructie, zonder daarbij de naam van Scaliger te noemen, en hij merkt droogjes op: 'Dan ick (als slecht [= eenvoudig] in desen) wil op de selve maniere bewijsen / dat het Quadraet des omloops elf-mael soo groot is / als het Quadraet des Diameter.' In andere woorden: men kan op dezelfde manier bewijzen dat $\pi_1 = \sqrt{11}$.

Kadertekst 2

Scaliger's constructie van de regelmatige zevenhoek met passer en liniaal (zie [4], pp. 52-54).
Deze komt neer op de volgende constructie van een hoek van $\frac{1}{7}$ maal 180°.
Construeer een cirkel met middellijnen *AC* en *BD* die loodrecht op elkaar staan (***zie figuur 3***). Neem op het verlengde van *CA* twee punten *S* en *G* zodat driehoek *BDS* gelijkzijdig is, en *AG* gelijk is aan de zijde van het ingeschreven vierkant in cirkel *ABCD*. Men kan nu aantonen dat $\angle BGD$ = 45° en dat *BD* de zijde van de achthoek is in de cirkel met straal *BG*.
Construeer het midden *F* van *GS*, en teken een deel van de cirkel met middelpunt *F* en straal *FB*; deze gaat door *D* en snijdt *AC* in het punt *P*. Trek *BP*.
Nu construeren we punten *O* en *N* op de cirkel met middelpunt *F* zodat *PB* = *BO* = *ON* en we verlengen *FN* en *PB* totdat ze elkaar snijden in punt *M*. We kiezen punt *L* op *BM* zodat *ML* = *MN* (zie de figuur).
De gelijkbenige driehoeken *FPB*, *FBO*, *FON* zijn alledrie congruent. Omdat $\angle NOF = \angle BOF$ geldt ook $\angle NOL = \angle BOL$, en omdat *NO* = *OB* en *OL* = *OL* zijn de driehoeken *NOL*, *BOL* congruent.
En dus geldt $\angle ONL = \angle OBL$, dus $\angle FNL = \angle FBL$, zodat $\angle MNL = \angle FBP$.
Omdat de driehoeken *MLN* en *FBP* allebei gelijkbenig zijn, concluderen we $\angle MLN = \angle MPF$. De driehoeken *MLN* en *MPF* zijn dus gelijkvormig, en daarom is $\angle MFP = \angle BPF$.
Omdat de hoeken *PFB*, *BFO*, *OFN* gelijk zijn, volgt:
$\angle PBF = \angle BPF = 3\angle PFB$ (Wij zouden zeggen $\angle PFB = \frac{1}{7} \cdot 180°$.)
Scaliger concludeert dat de rechte *FD* de cirkel *ABCD* snijdt in een punt *V* zodat *DV* een zijde is van een ingeschreven regelmatige zevenhoek in deze cirkel.



figuur 3

De lezer kan zelf nagaan: klopt deze constructie, of is zij, in de woorden van Van Ceulen, 'niet volcomen'?

Op weg naar IMO2011

IMO2007 - OPGAVE 4

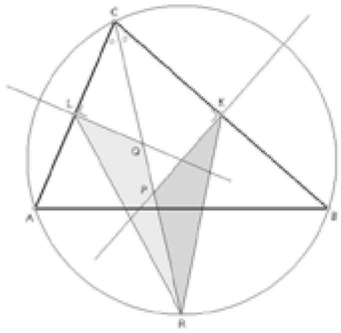
[Wouter Zomervrucht]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

Ter voorbereiding op de IMO is er elk jaar een training. Tweemaal heb ik aan deze training meegedaan. In 2006 werd ik zevende in de eindselectie en kon daarom helaas niet mee naar Slovenië, waar de IMO toen werd gehouden. Het jaar daarna had ik profijt van de opgedane trainingservaring en kwam ik in de Nederlandse delegatie voor de IMO in Vietnam terecht. Een ver land, een spannende wedstrijd… een unieke ervaring! Na nog een week training ter plaatse begon de wedstrijd. Op de tweede dag kregen alle 520 deelnemers het volgende probleem voorgeschoteld.

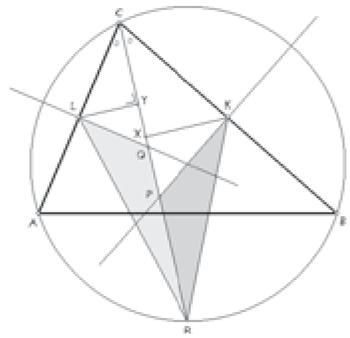
De opgave
Gegeven is een driehoek ABC. De bissectrice van hoek BCA snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in het punt R ($R \neq C$), de middelloodlijn van de zijde BC in het punt P en de middelloodlijn van de zijde AC in het punt Q. Het midden van BC is K en het midden van AC is L. Bewijs dat de driehoeken RPK en RQL dezelfde oppervlakte hebben.

Om te beginnen maken we een plaatje van de situatie (***zie figuur 1***). Zo krijgen we een idee van de opgave en van wat er bewezen moet worden. Allereerst tekenen we de driehoek ABC en zijn omgeschreven cirkel (in de praktijk teken je natuurlijk *eerst* de cirkel: het is veel makkelijker om een driehoek in een cirkel te tekenen dan een cirkel om een driehoek). De bissectrice van hoek BCA snijdt eerst de zijde AB en daarna de cirkel, in het punt R. Merk op dat R dan halverwege boog AB ligt; dat is ook handig om te weten bij het tekenen van het plaatje. Van de zijden BC en AC tekenen we de middelloodlijnen. Deze gaan door het midden van die zijden – dus door K en L.



figuur 1

In figuur 1 zijn de driehoeken RPK en RQL aangegeven. We moeten bewijzen dat deze dezelfde oppervlakte hebben. Het ligt dus voor de hand om te proberen uitdrukkingen te vinden voor de oppervlaktes van beide driehoeken, en vervolgens te bewijzen dat die gelijk zijn.
Bij de olympiadetraining leer je veel formules voor de oppervlakte van een driehoek, maar vaak is de bekendste toch het handigst: de helft van de basis maal de hoogte. We gaan proberen die formule te gebruiken.
Nu hebben we echter een probleem. Van beide driehoeken hebben we geen hoogtelijn, welke zijde we ook als basis kiezen. We moeten dus een hoogtelijn tekenen. Wat wordt de basis? We laten ons leiden door de informatie die we hebben. De driehoeken CKP en CLQ zijn twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken, want er geldt $\angle PCK = \angle QCL$ en $\angle CKP = 90° = \angle CLQ$. Het is een bekend feit dat als we in een rechthoekige driehoek de loodlijn nemen uit de rechte hoek, er veel gelijkvormige driehoeken ontstaan. Bovendien zien we in dit geval dat de *loodlijn* uit K op CP precies een *hoogtelijn* van driehoek RPK is. Dit lijkt dus een goede keus! We noemen het voetpunt van die hoogtelijn X, en Y wordt het voetpunt van de hoogtelijn uit L op CQ. Nu zijn we in de situatie als is weergegeven ***in figuur 2***.



figuur 2

De driehoeken CKP, KXP, CXK, CLQ, LYQ en CYL zijn allemaal gelijkvormig! Al die gelijkvormigheden suggereren dat we moeten kijken naar de *verhouding* van oppervlaktes. Laten we eerst de verhouding tussen de hoogtelijnen KX en LY bekijken. We weten bijvoorbeeld:

$$\textbf{(1)}\ldots\ \frac{KX}{LY} = \frac{KP}{LQ} = \frac{CP}{CQ} = \frac{CK}{CL}$$

Dit zijn slechts een paar van de vele gelijke verhoudingen – ga maar na. We keren terug naar ons doel: bewijzen dat de driehoeken RPK en RQL gelijke oppervlakte hebben. Dus moet gelden:
$\frac{1}{2} \cdot RP \cdot KX = \frac{1}{2} \cdot RQ \cdot LY$
In verhoudingen staat hier niets anders dan:

$$\textbf{(2)}\ldots\ \frac{KX}{LY} = \frac{RQ}{RP}$$

Maar nu zien we iets vreemds, als we schrijven $RP = CR - CP$ en $RQ = CR - CQ$. (Waarom liggen P en Q trouwens altijd tussen C en R? *Hint*: bewijs dat C en R niet aan dezelfde kant van de middelloodlijn van zijde BC respectievelijk AC kunnen liggen.) Volgens (1) geldt:

$$\frac{KX}{LY} = \frac{CP}{CQ}$$

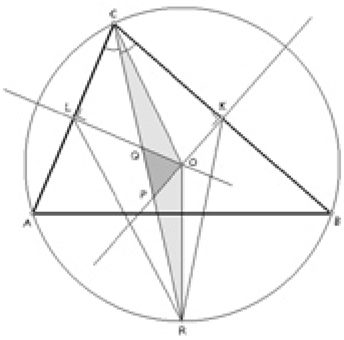
en aan de andere kant hebben we:

$$\frac{RQ}{RP} = \frac{CR - CQ}{CR - CP}$$

Vergelijking (2) is daarom equivalent met:

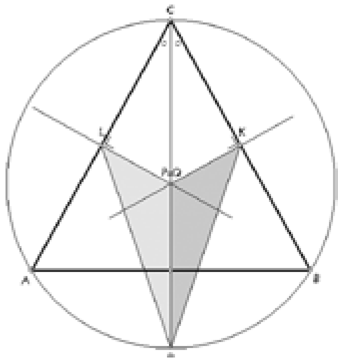
$$\frac{CP}{CQ}=\frac{CR-CQ}{CR-CP}$$

Dus na uitvermenigvuldigen moeten we bewijzen dat geldt:
(3)… $CP\cdot(CR-CP)=CQ\cdot(CR-CQ)$
Dit is een heel opmerkelijke vergelijking. Om hieraan te voldoen moeten P en Q wel bijzondere punten zijn: de enige mogelijkheden zijn: $CQ = CP$ óf $CQ = CR - CP$. Dat zie je door (3) als een kwadratische vergelijking in CQ op te vatten. De variant $CQ = CP$ lijkt in ons plaatje (***zie figuur 2***) niet te kloppen. Dus zullen we proberen te bewijzen dat geldt: $CQ = CR - CP$
Dat komt erop neer dat CQ en RP even lang zijn, oftewel dat het lijnstuk PQ precies in het midden van het lijnstuk CR ligt.
Op het eerste gezicht lijkt dat niet zo makkelijk te bewijzen. We hebben een creatief idee nodig. Een mogelijkheid is om op te merken dat de twee middelloodlijnen in feite middellijnen van de omgeschreven cirkel zijn en elkaar snijden in O, het middelpunt van die cirkel. Aangezien C en R op de cirkel liggen, geldt $OC = OR$; zie voor de duidelijkheid ***figuur 3***.



figuur 3

Driehoek COR is dus gelijkbenig, en O ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk CR. De gelijkheid $CQ = RP$ komt neer op bewijzen dat P en Q even ver van het midden van CR liggen, dus even ver van O. Dat punt is immers een punt op de middelloodlijn van CR. Ons doel wordt dus te bewijzen dat $OP = OQ$.
Dit is hetzelfde als zeggen dat driehoek POQ gelijkbenig is. Daar kunnen we iets mee! Met het plaatje erbij is dat helemaal niet moeilijk.
Laten we $\angle ACR = \angle RCB = d$ noteren. We zien in driehoek CKP meteen dat geldt:
$\angle OPQ = \angle KPC = 90° - d$
Net zo is, wegens overstaande hoeken:
$\angle OQP = \angle LQC = 90° - d$
Driehoek POQ is inderdaad gelijkbenig! Er volgt dat P en Q even ver van het midden van CR liggen, zodat CQ en RP even lang zijn. (Je kan ook eenvoudig bewijzen dat



figuur 4

de driehoeken CQO en RPO congruent zijn.) De stelling is bewezen!
Bewezen? Nou ja, bijna. We hebben een paar verborgen aannamen gemaakt. Wat gebeurt er als O op het lijnstuk CR ligt? Of als P en Q samenvallen? En wat verandert er als C, Q, P en R niet in die volgorde liggen, maar in de volgorde C, P, Q, R? Probeer te bewijzen dat deze gevallen precies afhangen van of $AC < BC$ is, dan wel $AC = BC$ of $AC > BC$. In dat laatste geval kunnen we een bewijs geven dat heel erg lijkt op het bovenstaande (waarbij we impliciet $AC < BC$ hebben aangenomen), maar met A en B verwisseld. In het geval $AC = BC$ is de situatie zo eenvoudig dat er een heel simpel bewijs is (zie ook ***figuur 4***[1]).

Dit is een echte olympiadeopgave: de oplossing vereist weinig voorkennis, maar het vinden van de oplossing is de uitdaging. Enige creativiteit is nodig om het punt O te gebruiken. Die creativiteit had ik destijds niet, zodat mijn bewijs een stuk ingewikkelder was. Toch had ik deze opgave goed opgelost. Op de eerste wedstrijddag had ik ook opgave 1 opgelost, en met nog 2 losse punten erbij was dat genoeg voor een bronzen medaille. Maar wat het meest is blijven hangen, is het spektakel – het land, de wedstrijd, de grootse openings- en slotceremonie.
De olympiade is een belangrijke reden dat ik wiskunde ben gaan studeren en er nog steeds mee bezig ben.

Noot
[1] Figuur 4 is door de redactie aan het artikel toegevoegd.

Over de auteur
Wouter Zomervrucht heeft in 2007 deelgenomen aan de IMO in Vietnam en in 2006 aan de Internationale Taalkunde Olympiade in Estland. Hij studeert wiskunde (richting algebra, meetkunde en getaltheorie) en informatica aan de Universiteit Leiden en werkt daar ook als student-assistent.
E-mailadres: *w.zomervrucht@gmail.com*

Algebra op het scherm

IMPRESSIE VAN EEN PILOT

[Paul Drijvers, Nora Niekus]

Inleiding
We vertellen u geen nieuws als we stellen dat er veel te doen is over het algebra-onderwijs in Nederland. Presteren onze havo- en vwo-leerlingen onder de maat?[1] Is het nodig dat universiteiten instaptoetsen afnemen? [2] Zal een nieuw curriculum uitkomst brengen? [3] Is in deze problematiek een rol weggelegd voor ict? [4]
Uitgeverijen reageren vanzelfsprekend op deze onrust, enerzijds door in de school-methoden meer aandacht te besteden aan algebraïsche vaardigheden, en anderzijds door het aanbod aan ict voor algebra te vergroten. In de zomer van 2009 klopte Educatieve Partners Nederland (EPN) aan bij het Freudenthal Instituut (FI) met de vraag om mee te werken aan een pilot betreffende het ontwikkelen en uittesten van een digitale module voor vwo-6 over algebraïsche vaardigheden. De module zou hoofdstuk 14 uit deel vwo-6 wiskunde B van de methode *Getal & Ruimte* vervangen. EPN wilde de online module ontwikkelen binnen de Digitale WiskundeOmgeving van het Freudenthal Instituut.
Deze Digitale WiskundeOmgeving (DWO) wordt op veel Nederlandse scholen gebruikt en omvat:

1. wiskundige inhoud in de vorm van applets en lesmateriaal,
2. een auteursomgeving waarin uit het bestaande materiaal nieuwe modules ontwikkeld kunnen worden, en
3. een leerlingvolgsysteem voor de registratie van het leerlingenwerk [5].

Afgesproken is dat de auteurs van *Getal & Ruimte* in de auteursomgeving van de DWO de nieuwe module ontwikkelen, gebruikmakend van de al aanwezige 'bouwstenen', en dat de deelnemende scholen het leerlingvolgsysteem van de DWO gebruiken om de vorderingen van de leerlingen vast te leggen.
Hoewel de insteek van een private uitgever en een publieke universitaire vakgroep natuurlijk niet dezelfde is, vonden EPN en FI elkaar hier: voor EPN is het van belang de mogelijkheden van digitaal materiaal bij de bestaande methode te onderzoeken, en voor het FI is het interessant om te onderzoeken hoe bruikbaar de auteursomgeving is voor de auteurs van een grote methode en hoe de ervaringen van een groep gebruikers van *Getal & Ruimte* met deze module zijn. In dit artikel doen we verslag van deze ervaringen.

De module
Met technische ondersteuning van het FI hebben de auteurs van *Getal & Ruimte* de module ontwikkeld. Als opzet is ervoor gekozen om dicht bij het boek te blijven. Dat houdt in dat de indeling van de module overeenkomt met de paragraaf-indeling van het boek. Verder verschijnt het boekhoofdstuk als pdf-bestand op het scherm, en bevat dat links naar overeenkomstige opgaven in de online module. ***Figuur 1*** geeft een indruk van het pdf-bestand en de module, die u ook online kunt bekijken.[6]
De opgaven in de online module variëren door randomiseren van de parameters binnen door de auteurs bepaalde grenzen. Op de stappen die de leerlingen zetten, wordt feedback gegeven, behalve in de zelftoets, die de afsluiting van de module vormt. Verder bevat de module instructie-filmpjes, die de leerlingen kunnen bekijken en beluisteren (liefst met de 'oortjes' van hun mp3-speler), en die uitleg geven over technische maar vooral algebraïsche zaken. Het werk van de leerlingen wordt opgeslagen op een server van het FI. Met hun logincode kunnen de leerlingen op elke computer (mits met internetverbinding en Java) aan hun module verder werken. De docent heeft toegang tot het werk van alle leerlingen uit zijn of haar klassen en kan op die manier de vorderingen volgen.

Opzet van de pilot
Toen de module in het najaar 2009 klaar was, heeft EPN scholen benaderd om de module met leerlingen uit te testen. Een zeventigtal scholen reageerde hierop; een respons die ons verraste. EPN ondersteunde de scholen bij het maken van leerlingen-accounts die toegang geven tot de module.
Het FI heeft het verloop van de pilot op verschillende manieren gemonitord: ten eerste door de deelnemende docenten voor en na de pilot een online vragenlijst voor te leggen, en ten tweede door de pilot-lessen op één school in detail te observeren. Daarnaast is een vijftal docenten van drie verschillende scholen geïnterviewd en hebben incidentele observaties op een andere school plaatsgevonden.
De vraag was natuurlijk op welke school de (arbeidsintensieve!) observaties zouden plaatsvinden. Onze interesse werd gewekt door een school niet zo ver van Utrecht, die de uitgeverij kort na de inschrijving liet weten zich terug te trekken voor de pilot. Navraag leverde op dat daarvoor twee redenen waren: beperkte computer-capaciteit op school en weerstand van de leerlingen tegen algebra op de computer, omdat het examen toch weer met de hand moet worden gemaakt. Toen bleek dat we met medewerking van Dell een set van notebook computers met bijpassend draadloos netwerk voor de tijd van de pilot konden regelen, en we aangaven te verwachten dat het werken met de module direct transfer zou hebben naar het werken met pen en papier, heeft de docent opnieuw met de twee klassen gesproken en zijn de leerlingen overtuigd. Dit leek ons een interessant kader voor onze observaties, waarvan we hieronder enkele 'highlights' presenteren.

Het verloop op een van de scholen
Hoe ging het nu met die 'tegenstribbelende' leerlingen op onze observatieschool? In grote lijnen goed. Aanvankelijk waren er leerlingen die aangaven het invoeren van formules en vergelijkingen op de netbook computer bewerkelijker te vinden dan met de hand. Dat is het ook wel, maar als je handiger wordt in het typen en in het kopiëren van (deel-)expressies, blijkt het na verloop van tijd toch weer een heel stuk sneller te gaan. Verder bleken de leerlingen de eerste lessen vaak het boek en hun schrift op de bank te hebben en ook af en toe met pen en papier te werken. Het was overigens

ook de opzet van de module dat pen en papier en digitaal werk elkaar zouden afwisselen. In de loop van de pilot verdwenen boek en schrift echter steeds meer van de banken. Hoewel dat niet de bedoeling was, geeft het wel aan dat de a priori weerstand van de leerlingen tegen 'algebra op het scherm' tijdens de lessenserie is verdwenen. Wel leidden beperkingen van de module soms tot wat irritatie. Zo keurde de module bij een bepaalde opgave het antwoord 7/2 niet goed en 3 ½ wel. Dan was de taak voor de leerling om uit te vinden 'wat de computer wil zien', terwijl het eigenlijke doel is dat ze nadenken over en oefenen met algebraïsche vormen en technieken.

Opvallend op deze school was de uitstekende ondersteuning. Een technisch onderwijsassistent zette de koffers met netbooks en access points voor draadloos internet elke les op het juiste moment in het juiste lokaal, en zorgde ervoor dat de netbooks waren opgeladen. Onder deze omstandigheden was het een perfecte configuratie: de netbooks hebben een lange accuduur en zijn zo klein dat boek en schrift ook nog op de bank passen. Wel maakt het kleine scherm van de netbook samenwerking minder goed mogelijk en verliep het opstarten via het draadloze netwerk af en toe wat traag.

En hoe ging het met de algebra? ***Figuur 2*** geeft een indruk. De leerling wordt gevraagd de vergelijking linksboven op te lossen. Deze is van het type $A^2 = B^2$ maar in eerste instantie realiseert de leerling zich dat niet. Hij begint aan de linker kant haakjes uit te werken en herleidt vervolgens op 0. Dat geeft een vierdegraads vergelijking waar hij niet goed raad mee weet. Door 324 naar de andere kant te brengen wordt het er niet beter op en aan de mogelijkheid om x^2 te vervangen door p denkt hij evenmin. Dan, bij de tweede regel van het rechter scherm, ziet hij het licht en gaat hij alsnog de wortel nemen van de oorspronkelijke vergelijking. Dat leidt vervolgens vrij direct naar de juiste oplossing.

Die doorbraak kwam overigens niet helemaal spontaan tot stand: de docent was langsgelopen en er vond een gesprekje plaats dat de leerling op weg hielp. Dat hebben we meer gezien: dat de interactie met de docent de doorslag geeft in het leren van de leerlingen. Het is dus zeker niet zo dat de docent overbodig wordt. Wel kwam in de observaties het beeld naar voren dat de docent de neiging had zich terughoudend op te stellen: hij liet de leerlingen vrijwel uitsluitend zelf werken en beperkte zich tot individuele uitleg en hulp, waarbij het initiatief vooral van de leerling uitging (***zie figuur 3***). Later in de lessenserie werd in de les ook wel het overzicht van de vorderingen van de klas geprojecteerd (***zie figuur 4***), met het doel om de leerlingen te motiveren. Verdergaande mogelijkheden, zoals bijvoorbeeld een klassikale nabespreking van het werk van een leerling, wat we wel op een andere school zagen gebeuren, werden hier niet benut.

Globaal beeld uit de vragenlijsten

Hoe ging het op de andere scholen? De resultaten van de vragenlijsten geven daarvan een impressie. Een van de vragen van de vragenlijst die na afloop van de pilot aan docenten is voorgelegd, luidt: Hoe beoordeelt u de kwaliteit van de digitale module? De respons daarop staat ***in tabel 1 op pag.116***. Hieruit blijkt dat de docenten overwegend positief zijn over de kwaliteit van de module. Zeer tevreden is men over het niveau en het aantal opgaven en over de voorbeeldfilmpjes. De kwaliteit van de feedback scoort matig.

Hoe reageerden de leerlingen op deze digitale module? Een van de items van de evaluatieve vragenlijst luidt: De leerlingen vonden de pilot …'. De antwoorden van de docenten staan ***in tabel 2***. Het beeld dat hieruit naar voren komt, is gematigd positief: overwegend is de module door leerlingen als leuk en afwisselend ervaren. De motiverende werking, die uit mondelinge reacties van docenten wel naar voren komt, blijft wat achter. Wellicht is de soms nog matige feedback hiervoor een verklarende factor.

Als de leerlingen globaal gesproken positief zijn over de module, vertaalt zich dat dan ook een verbeterde algebraïsche vaardigheid? Van de 40 docenten die deze vraag hebben beantwoord, vonden 6 van niet; 17 zeiden dit niet te weten, en ook 17 vonden dat de vaardigheid wel degelijk was toegenomen.

Hoe kijken de deelnemende docenten zelf terug op de uitvoering van deze module? ***Tabel 3*** vat de antwoorden samen op de vraag 'Hoe beoordeelt u uw ervaringen met deze pilot in het algemeen?'. Als minder positieve ervaring wordt gemeld dat de feedback ontoereikend was en dat er incidenteel problemen waren met het opslaan van leerlingenwerk. Er is een zwakke correlatie tussen het oordeel over de pilot en de mate van ervaring met ict in de les: docenten met meer ict-expertise ervaren de pilot positiever dan docenten zonder ict-ervaring. Dat deze correlatie slechts zwak is, suggereert dat de uitvoering van de pilot geen al te hoge eisen stelt aan op dit gebied onervaren docenten.

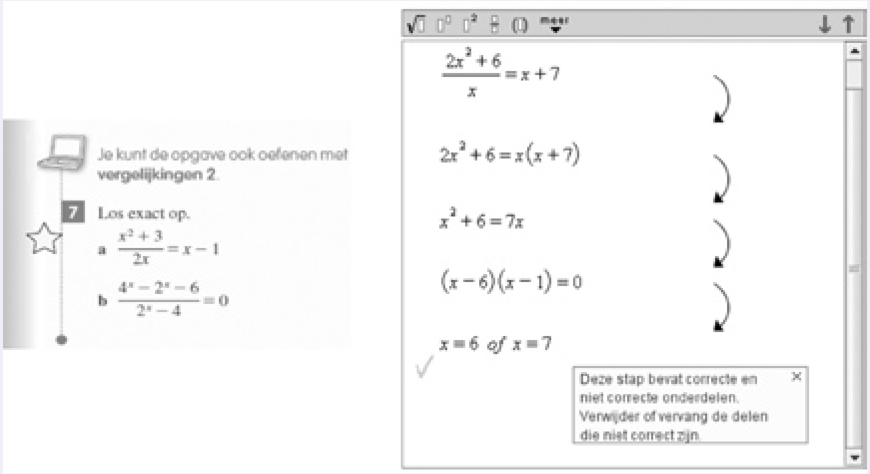
Interessant is het om na te gaan hoe de pilot-docenten zijn omgegaan met de beschikbare ict. In de vragenlijst voorafgaand aan de pilot blijkt dat ongeveer 30% van de docenten regelmatig ict in de wiskundeles gebruikt. Daarbij zijn behalve de grafische rekenmachine de docentencomputer, beamer en digitaal schoolbord de meest gebruikte ict-middelen. Dit suggereert dat docenten gewend zijn ict vooral in klassikale, docentgestuurde werkvormen te gebruiken. Hoe is dat in deze pilot? ***Tabel 4*** geeft hierover informatie. In vergelijking met het gewoonlijke gebruik van ict (de middelste kolom) zien we een grote verschuiving: ict is in de pilot hoofdzakelijk gebruikt voor het werken in tweetallen of individueel, in de klas zowel als thuis (rechter kolom). Klassikaal onderwijs heeft kennelijk weinig plaatsgevonden en de docenten begeleiden leerlingen vermoedelijk vooral individueel of in paren.

Deze indruk wordt versterkt door de gegevens ***van tabel 5***, waarin in het midden staat hoe vaak docenten verschillende werkvormen in de pilot verwachten te zullen gebruiken, en rechts wat ze daadwerkelijk hebben gedaan. Dit suggereert dat de docenten in de pilot hun werkvormen ingrijpend hebben gewijzigd, en ook meer dan ze bij aanvang zelf hadden verwacht. De oorzaak daarvan is niet duidelijk. Het is mogelijk dat de module uitnodigt tot zelfstandig werken en daarmee tot ander docentengedrag. Het kan ook zijn dat de computerlokalen waar de pilot veel is uitgevoerd, zich minder goed lenen voor klassikaal werken. Een andere mogelijkheid is dat docenten zich in deze nieuwe situatie, waarin ze wellicht minder zeker zijn van hun eigen computervaardigheden, wat terugtrekken en kiezen voor een eenvoudige werkvorm. De observatie van een expertdocent die de module mee ontwikkelde, en de interviews met twee ervaren docenten maken duidelijk dat bij

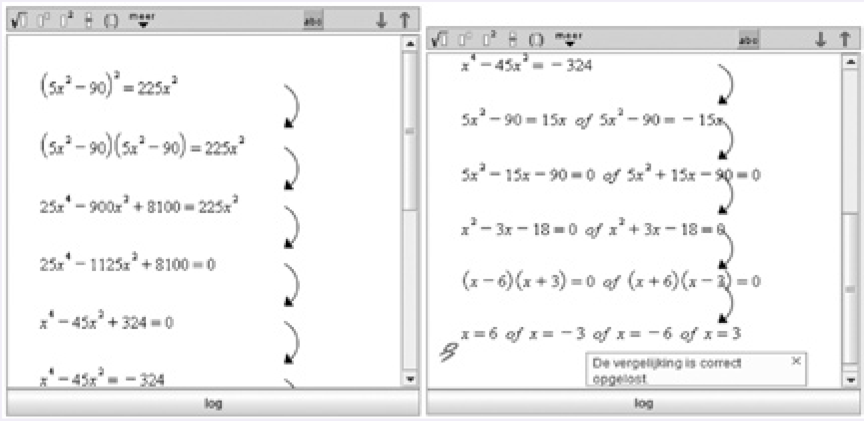
een dergelijke terughoudende opstelling mogelijkheden onbenut kunnen blijven: met name het gebruik van het leerlingvolgsysteem bij de lesvoorbereiding en in de klas als middel om leerlingenwerk te bespreken biedt krachtige didactische mogelijkheden. Door het leerlingenwerk vooraf te bekijken kan de docent een indruk krijgen van de vorderingen en de veelvoorkomende moeilijkheden, waarop dan de volgende les kan worden ingegaan. Tijdens een les kan werk van een leerling worden geprojecteerd en worden toegelicht of beoordeeld.

Conclusie

Wat kunnen we concluderen uit het verloop van deze pilot? Allereerst blijkt de module in de praktijk van de reguliere wiskundeles te voldoen. De deelnemende docenten, niet noodzakelijk experts op ict-gebied, en hun leerlingen hebben goed met de module kunnen werken. De algebraïsche vaardigheden van de leerlingen zijn volgens hun docenten toegenomen. Sommige docenten rapporteren veel enthousiasme bij de leerlingen, maar dat is over de hele linie van de vragenlijst niet zo goed zichtbaar. Mogelijk heeft de beperkte feedback van de module het enthousiasme afgeremd.
Over de leereffecten en de transfer naar pen-en-papier hebben we in deze pilot geen directe gegevens verzameld. De indirecte rapportage op dit punt door docenten is vrij positief, maar onvoldoende om conclusies uit te trekken. Dit vraagt nader onderzoek, waaraan we op dit moment werken.
De werkvormen die docenten hanteren, en de ict-middelen die daarbij worden gebruikt, lijken sterk te verschillen van die van de normale situatie. De indruk is dat nog niet alle docenten in staat zijn om de kansen die deze module en dit leerarrangement bieden, optimaal te benutten. We denken dan met name aan het bekijken van leerlingenwerk in de lesvoorbereiding en het bespreken van opvallend leerlingenwerk in de lessen. Het goed omgaan met digitaal materiaal in de les vraagt kennelijk om een deskundigheidsontwikkeling van docenten. Die professionele ontwikkeling en de ontwikkeling van goede content zullen de komende jaren naar verwachting hoog op de agenda blijven staan.

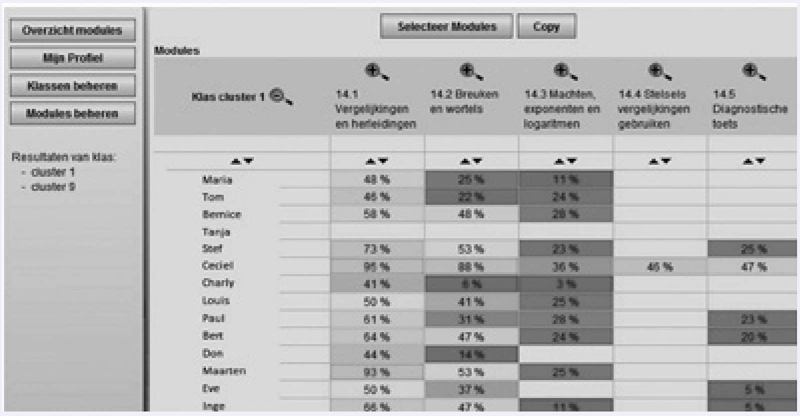


figuur 1 Schermafdruk van de pdf van het boek (links) en de digitale module (rechts)



figuur 2 Werk van een leerling bij een opgave van de vorm A2 = B2

figuur 3 De docent (links) in gesprek met een leerling (rechts) aan de hand van haar werk op de netbook computer



figuur 4 Overzicht van leerlingresultaten

Onderdeel van de module	Onvoldoende	Neutraal	Voldoende
Applets	5	40	55
Voorbeeldfilmpjes	3	28	70
Feedback-functie	38	28	35
Aantal opgaven	5	12	83
Niveau opgaven	7	7	85
Leerlingvolgsysteem	18	30	53
Begeleidende info voor docent	5	28	68

tabel 1 Kwaliteitsoordeel van de module door docenten (in % van $N = 41$)

De leerlingen vonden de pilot ...	Nee	Niet erg	Neutraal	Een beetje	Heel erg
Leuk	7,5	20	12,5	55	5
Motiverend	10	22,5	22,5	30	15
Afwisselend	7,5	17,5	15	45	15

tabel 2 Beleving van leerlingen volgens docenten (in % van $N = 40$)

Ervaringen met de pilot	Percentage
negatief	5
beetje negatief	22
neutraal	12
beetje positief	39
positief	22

tabel 3 Globale ervaringen van docenten (in % van $N = 41$)

Gebruikte ict-middelen	Voor pilot (% van $N = 47$)	Tijdens pilot (% van $N = 41$)
Beamer	57	46
Docentencomputer	57	32
Digitaal schoolbord	55	37
Computerlokaal	0	83
Computer in de klas	0	29
Computer thuis	0	83

tabel 4 Gebruikte ict-middelen voor en tijdens de pilot

	Verwachting voor de pilot (% van $N = 47$)			Tijdens de pilot (% van $N = 40$)		
Werkvorm	Niet	Soms	Vaak	Niet	Soms	Vaak
Klassikale uitleg	0	36	64	32	48	20
Klassikale demonstratie	19	62	19	38	47	15
Klassikale nabespreking	4	47	49	40	47	13
Klassikale presentaties	57	38	2	100	0	0
Individueel	6	26	66	2	2	96
Werken in tweetallen	9	30	60	28	25	47
Groepswerk	53	38	4	93	5	2
Huiswerk	23	28	47	7	53	40

tabel 5 Verwachte en gerealiseerde werkvormen

Noten

[1] P. Vos (2007): *Algebraprestaties van tweedeklassers: zijn ze voor- of achteruit gegaan?* In: *Euclides* 82(4); pp. 129-132.

[2] D. Tempelaar, W. Casper (2008): *Instaptoetsen wiskunde in een internationaal perspectief.* In: *Euclides* 83(5); pp. 250-253.

[3] P. Drijvers (2009): *Op weg naar 2014 / Stand van zaken rond de nieuwe examenprogramma's havo-vwo*. In: *Euclides* 84(7); pp. 261-264.

[4] P. Drijvers, B. Zwaneveld (2008): *Van knoppen naar kennis / Naar een functionele inzet van ICT in het wiskundeonderwijs*. In: A. van Streun, B. Zwaneveld, P. Drijvers (eds.): *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. Zie: « *www.elwier.nl* ».

[5] Zie « *www.fi.uu.nl/dwo* ». De DWO is onlangs positief uit een internationale vergelijking naar voren gekomen. Een verslag van dit onderzoek is te vinden via: *http://springerlink.metapress.com/content/6681764182812384/fulltext.pdf*

[6] Informatie over de pilot en het pdf-bestand van het hoofdstuk staan op: *www.epn.nl/wps/portal/epn/getalen-ruimte/ictpilot#vwo*
De online module is beschikbaar via: « *www.fi.uu.nl/dwo/gr-pilot/* ».

Over de auteurs

Paul Drijvers is universitair hoofddocent bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Zijn onderzoek richt zich onder meer op het gebruik van ict in de wiskundeles en met name bij algebra.
Nora Niekus heeft in het kader van haar masteropleiding onderwijskunde de monitoring uitgevoerd van de pilot waarop dit artikel betrekking heeft.
E-mailadressen: *p.drijvers@uu.nl* en *N.T.Niekus@students.uu.nl*

We worden ouder…

[Daaf Spijker]

Actueel

Ja, we worden inderdaad ouder, we ontkomen er niet aan. De lezer van de voorgaande zin kan de titel van dit artikel zeker beamen: als de punt aan het einde van die zin gelezen is (trouwens ook van *deze* zin), dan is hij/zij ouder geworden (niet veel, maar toch…).

Het ouder worden staat al enige tijd in de belangstelling. En niet alleen door de mogelijke verhoging van de pensioenleeftijd naar 67 jaar; zie het bericht in *Trouw* ***in figuur 1***.

Levensverwachting stijgt amper

Mannen genieten nauwelijks langer van hun pensioen dan vijftig jaar geleden. De levensverwachting van een 65-jarige is in een halve eeuw met nog geen twee jaar gestegen.

Deze cijfers van het Centraal Bureau voor de Statistiek staan haaks op het wijdverbreide idee, dat we allemaal stukken ouder worden. Dat idee is ook wel terecht: sinds 1900 is de levensverwachting van mannen gestegen van 47 naar ruim 75 jaar. Maar dat is het perspectief van pasgeborenen. Hun levensweg is vooral verlengd, doordat in de afgelopen eeuw de kindersterfte is teruggedrongen en het aantal verkeersslachtoffers is verminderd. En elke vermeden sterfte van een jongere weegt zwaar in de statistieken.

Maar vanaf het 65ste jaar is er niet veel veranderd. De Nederlandse man heeft bij het bereiken van de pensioenleeftijd nu nog gemiddeld 15,4 jaar te gaan, anderhalf jaar meer dan de 65-jarige uit 1960. In 1861 had een man van die leeftijd nog altijd ruim 10 jaar voor de boeg. Voor 65-jarige vrouwen is de winst groter: zij zijn er in een halve eeuw 3,6 jaar op vooruit gegaan.

Toch wordt de hogere levensverwachting vaak gebruikt als argument om de pensioenleeftijd op te hogen. Dat is dus niet terecht, maar het neemt niet weg, dat de vergrijzing een probleem wordt.

figuur 1 Bron: Trouw (4 januari 2006)

In januari 2010 maakte het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) bekend dat de *levensverwachting* van in 2008 geboren meisjes 82,3 jaar is, en dat is (precies?) vier jaar hoger dan die van in 2008 geboren jongens; die is 78,3.

Het Actuarieel Genootschap (AG) deed er daarna in augustus nog een schepje bovenop met de publicatie van een *prognose* waarin de *levensverwachting* voor mannen in 2050 op 85,9 jaar uitkomt en die voor vrouwen op 87,6 jaar.

Een (forse(?)) stijging dus, maar het verschil tussen beide seksen wordt kleiner!

In de Troonrede van 21 september j.l.: 'Het Nederlandse pensioenstelsel is robuust in vergelijking met de stelsels van andere landen. Maar maatregelen zijn noodzakelijk omdat de stijgende *levensverwachting* de pensioenuitkeringen onder druk zet.' En even verderop: 'Onze stijgende *levensverwachting* is een groot goed. Tegelijkertijd stelt zij de samenleving voor nieuwe uitdagingen.' En ook nog: 'zijn, door de groeiende vraag naar zorg, de kosten [daarvan] in de afgelopen jaren sterk toegenomen. Dit wordt veroorzaakt door steeds grotere technologische verbeteringen en de stijgende *levensverwachting*.'

En begin oktober in *de Volkskrant* [1]: 'We leven steeds langer. Maar waarom verrast die gestaag stijgende *levensverwachting* ons dan toch telkens weer? De prognoses zijn niet stabiel, vermoeden sommige experts.'

Maar wat is 'levensverwachting' eigenlijk? En ook, hoe wordt die levensverwachting berekend?

Actuarieel

Het CBS publiceert periodiek gegevens omtrent de sterfte in Nederland (voor de mannelijke en vrouwelijke bevolking apart). Die gegevens worden opgenomen in een zogenoemde *overlevingstafel*. Daarin staan voor elke *gehele x*:

- het aantal levende mannen (of vrouwen) met leeftijd x (op een bepaalde peildatum, meestal 1 januari), aangegeven met l_x ;
- het *sterftequotiënt* q_x voor personen met leeftijd x. Dat is het quotiënt van het aantal personen d_x dat overleden is in hun $(x + 1)$-de levensjaar, en l_x .
  In formule: $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$.

Een van de bewerkingen die op deze gegevens wordt toegepast, is een zodanige herleiding en herberekening dat $l_0 = 100.000$ (zie figuur 2, waarin – als voorbeeld – ook $l_{0,5}$ is opgenomen).

Het AG bewerkt op zijn beurt de jaarlijkse CBS-gegevens over een periode van 5 à 6 jaar, en geeft op basis daarvan de zogenoemde GBM- en GBV-tafels [2] uit, die in de praktijk (onder meer) door verzekeringsmaatschappijen worden gebruikt. Daardoor zijn de getallen in de AG-tafels niets anders dan gemiddelden. Zo is q_x in de overlevingstafel van figuur 2 voor elke x berekend als:

$$q_x = \frac{q_x^{(1995)} + q_x^{(1996)} + \ldots + q_x^{(2000)}}{6}$$

(Eigenlijk worden de waarden van l_x met q_x berekend uitgaande van $l_0 = 100.000$.)

En ook, de leeftijden worden als *gehele* getallen (de burgerlijke leeftijd) beschouwd op de peildatum. We hebben dus te maken met een *model* voor een *fictieve* (mannelijke of vrouwelijke) bevolking.

We spreken van een *actuarieel model* omdat de rekentechnieken die gebruikt worden, afkomstig zijn uit de *actuariële wiskunde*

x	l_x	q_x
0	100 000	0.0040800
0.5	99 592	0.0017681
1	99 461	0.0005029
2	99 366	0.0003724
3	99 329	0.0002517
4	99 304	0.0002115
5	99 283	0.0001914
6	99 264	0.0001713
7	99 247	0.0001411
8	99 233	0.0001411
9	99 219	0.0001411
10	99 205	0.0001310

figuur 2 Deel van een 'mannentafel' (gebaseerd op GBM 1995-2000)

(ook *verzekeringswiskunde* genoemd). *Binnen* dat actuariële model kunnen berekeningen worden uitgevoerd, zoals die van de 'levensverwachting'. Maar wat daaronder wordt verstaan, moet dan eveneens *binnen* dat model worden vastgelegd.

Voorbeeld – Stel het laatste deel van een overlevingstafel ziet er uit als ***in figuur 3***. Daarbij is ook al een eerste berekening gemaakt, namelijk die van de waarden van d_x: het aantal overledenen in het jaar dat volgt op de peildatum.

Hiermee is dus: $d_x = q_x \cdot l_x = l_x - l_{x+1}$

Merk op dat $d_{100} + d_{101} + \ldots + d_{109} = l_{100}$ (immers, alle 100-jarigen zijn na 9 jaar, d.w.z. aan het einde van het 109e jaar, overleden).

x	l_x	q_x	d_x
100	221	0,4162896	92
101	129	0,4263566	55
102	74	0,4324324	32
103	42	0,4523810	19
104	23	0,4782609	11
105	12	0,5000000	6
106	6	0,5000000	3
107	3	0,3333333	1
108	2	0,5000000	1
109	1	1,0000000	1
110	0		

figuur 3 Laatste deel van GBM 1995-2000

Door deze manier van rekenen kan de totale *jaarlijkse* sterfte dus pas worden vastgesteld aan het *einde* van het beschouwde jaar.

We nemen daarom eerst maar eens aan

dat *alle* sterfte in elk jaar *aan het einde* van dat jaar plaats vindt. Dan kunnen we het (*verwachte*) aantal L van de *doorleefde* jaren van de 221 mannen die 100 jaar zijn, eenvoudig uitrekenen:

$$L = 92 \times 1 + 55 \times 2 + 32 \times 3 + \ldots + 1 \times 9 + \\ + 1 \times 10 = 513$$

Of ook:

$$L = d_{100} \times 1 + d_{101} \times 2 + \ldots + d_{108} \times 9 + \\ + d_{109} \times 10 = 513$$

Gemiddeld is dat dan: $\frac{513}{221} \approx 2{,}32$ jaar.

Die 100-jarigen worden in dit geval, naar verwacht en met de genoemde veronderstelling (en binnen het actuariële model), gemiddeld 100 + 2,32 = 102,32 jaar.

Doorleefd

De leeftijd x waarvoor $l_x \neq 0$ én $l_{x+1} = 0$ geven we aan met ω (*omega*). In de overlevingstafel ***van figuur 3*** is dus ω = 109.

Nu geldt algemeen, met L_l = het aantal doorleefde jaren van een groep bestaande uit l_x personen van wie de sterfte *aan het einde* van een jaar plaatsvindt (de index l van L staat voor 'lang'):

$$L_l = d_x \cdot 1 + d_{x+1} \cdot 2 + d_{x+2} \cdot 3 + \ldots + \\ + d_{\omega-1} \cdot (\omega - x) + d_\omega \cdot (\omega - x + 1)$$

We zetten nu de termen van het rechterlid van L_l handig onder elkaar:

$$\begin{aligned} d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_{\omega-1} + d_\omega &+ \\ + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_{\omega-1} + d_\omega &+ \\ + d_{x+2} + \ldots + d_{\omega-1} + d_\omega &+ \\ + \ldots \qquad \ldots &+ \\ + d_{\omega-1} + d_\omega &+ \\ + d_\omega & \end{aligned}$$

En dan blijkt dat:

$$L_l = l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{\omega-1} + l_\omega \\ = \sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j}$$

Of ook, met een gewijzigde eindwaarde van j in de sommatie:

$$L_l = \sum_{j=0}^{\omega} l_{x+j}$$

Immers, door wijziging van de eindwaarde van j worden de termen $l_{\omega+1}, l_{\omega+2}, \ldots$ toegevoegd. Maar die zijn alle gelijk aan 0.

Vervolgens…

Als we aannemen dat *alle* sterfte *aan het begin* van het jaar plaats vindt, dan is het aantal L_k van de doorleefde jaren (de index k van L staat voor 'kort'):

$$L_k = d_x \cdot 0 + d_{x+1} \cdot 1 + d_{x+2} \cdot 2 + \ldots + \\ + d_{\omega-1} \cdot (\omega - x - 1) + d_\omega \cdot (\omega - x) \\ = \sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+j}$$

en dus ook:

$$L_k = \sum_{j=1}^{\omega} l_{x+j}$$

We kunnen L_l schrijven als:

$$L_l = l_x + \sum_{j=1}^{\omega} l_{x+j} = l_x + L_k$$

en daaruit zien we dat: $L_l - L_k = l_x$.

We definiëren nu:

- de **verkorte** *levensverwachting* van een x-jarige is gelijk aan $\overline{e}_{k,x} = \frac{L_k}{l_x}$;
- de **verlengde** *levensverwachting* van een x-jarige is gelijk aan: $\overline{e}_{l,x} = \frac{L_l}{l_x}$.

Merk op dat deze levensverwachtingen eveneens gemiddelden zijn, en, binnen het actuariële model, gebaseerd zijn op bepaalde veronderstellingen.

Ook kunnen we de sterfte die plaats vindt in de *eerste helft* van een jaar, *aan het begin* van dat jaar zetten, en de sterfte die plaats vindt in de tweede helft, *aan het einde* van het jaar.

Dan geldt voor het aantal L van de doorleefde jaren in dit geval:

$$L = \tfrac{1}{2} L_l + \tfrac{1}{2} L_k$$

L is dan zeker een betere benadering (maar nog steeds een *benadering*) van het *werkelijk* aantal doorleefde jaren dan de verkorte of de verlengde levensverwachting.

Uit $L_l - L_k = l_x$ volgt na deling door l_x:

$$\overline{e}_{l,x} - \overline{e}_{k,x} = 1$$

Gevolg:

$$\frac{L}{l_x} = \tfrac{1}{2}\overline{e}_{l,x} + \tfrac{1}{2}\overline{e}_{k,x} = \tfrac{1}{2}\overline{e}_{l,x} + \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{l,x} - 1) \\ = \overline{e}_{l,x} - \tfrac{1}{2}$$

Levensverwachting

We definiëren op grond van het bovenstaande:

- de ***gemiddelde*** *levensverwachting* van een x-jarige is gelijk aan: $\overline{e}_x = \overline{e}_{l,x} - \tfrac{1}{2}$.

Opmerking 1. Er geldt, analoog, overigens ook: $\overline{e}_x = \overline{e}_{k,x} + \tfrac{1}{2}$.

Opmerking 2. We kunnen dit laatste ook op een andere manier inzien. Als de sterfte in de eerste helft van een jaar *aan het begin* van dat jaar wordt gezet (en de sterfte in de tweede helft aan het einde van het jaar), dan is het totaal L_1 van de doorleefde jaren van een groep bestaande uit l_x personen in het $(x + 1)$-de jaar gelijk aan:

$$L_1 = l_x - \tfrac{1}{2} d_x \\ = l_x - \tfrac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) = \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

Voor het totaal L van alle doorleefde jaren van deze personen geldt dan:

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{\omega}(l_{x+j} + l_{x+1+j}) \\ &= \tfrac{1}{2} l_x + \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{\omega}(l_{x+1+j} + l_{x+j+1}) \\ &= \tfrac{1}{2} l_x + \sum_{j=0}^{\omega} l_{x+j+1} = \tfrac{1}{2} l_x + \sum_{j=1}^{\omega} l_{x+j} \\ &= \tfrac{1}{2} l_x + L_{k,x} \end{aligned}$$

Deling door l_x geeft dan: $\overline{e}_x = \tfrac{1}{2} + \overline{e}_{k,x}$.

Rekenen

En dán kunnen we rekenen… mits we beschikken over een overlevingstafel (voor mannen of voor vrouwen) met waarden van l_x cq. l_y (voor x, y = 0, 1, 2, …, ω) [3].

Het resultaat van zo'n berekening staat ***in figuur 4***.

mannen		vrouwen	
x	ē		

x	$\overline{e}_x$	y	$\overline{e}_y$
0	**75,06**	**0**	**80,48**
10	75,65	10	80,98
20	75,84	20	81,10
30	76,29	30	81,27
40	76,58	40	81,57
50	77,32	50	82,21
60	78,78	60	83,31
65	79,98	65	84,12
70	81,63	70	85,19
80	86,42	80	88,40
90	93,31	90	93,95
100	101,82	100	101,93

figuur 4 Gemiddelde levensverwachting (gebaseerd op GBM/GBV 1995-2000)

En… Als er wordt gesproken over ***de*** *levensverwachting* van een man of een vrouw, dan wordt daarmee dus bedoeld: de *gemiddelde levensverwachting van een 0-jarige* binnen het opgestelde actuariële model.

Maar of de zo berekende levensverwachting van toepassing is op de 'echte' bevolking, daarover bestaat, ook bij deskundigen, gegronde twijfel.

Noten

[1] Martijn van Calmthout (2010): *Rekenen op leven en dood*. In: *de Volkskrant* (zaterdag 2 oktober 2010); katern Wetenschap, p1-p2.

[2] GBM staat voor 'gehele bevolking, mannen' en GBV voor 'gehele bevolking, vrouwen'.

[3] Een overlevingstafel gebaseerd op GBM 1995-2000 kan als PDF-bestand worden gedownload via: *www.pandd.nl/downloads/mannen95.pdf*

Over de auteur

Daaf Spijker was actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider, schoolleider en (weer) wiskundeleraar. Nu is hij pensioengenietend, maar nog steeds geïnteresseerd in zijn 'eerste' vak.

E-mailadres: *spijker.daaf@gmail.com*

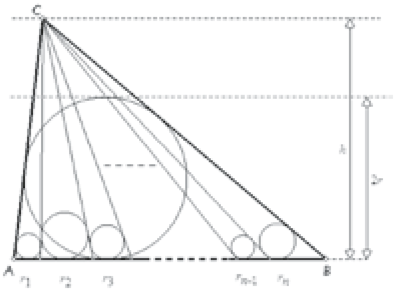
Een merkwaardige stelling over incirkels

[Paul Dillo]

Stelling 1

Trek $(n-1)$ lijnen in driehoek *ABC* van *C* naar *AB*. Noem de stralen van de incirkels van de *n* ontstane driehoeken r_k ($k = 1, \ldots, n$); ***zie figuur 1***. Is *h* de lengte van de hoogtelijn uit *C*, dan geldt voor de lengte van de straal *r* van de ingeschreven cirkel van driehoek *ABC*:

(1)… $1-\frac{2r}{h}=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{2r_k}{h})$



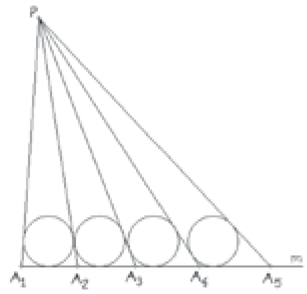
figuur 1

Merkwaardig is dat naast de stralen alleen de hoogte een rol speelt in deze formule. Bij de meeste driehoekformules spelen vaak drie grootheden een rol. En waarom ontstaat er een product?

Opmerking. Vroeger sprak men over *ingeschreven* cirkels en *aangeschreven* cirkels, maar onder invloed van het Engels (incircle, excircle) is dat nu *incirkel* en *uitcirkel* geworden.

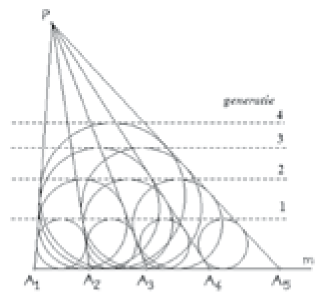
Ontstaan

Een aantal jaren geleden wees mijn collega Wim van de Camp mij op de volgende curiositeit.
Kies een lijn *m* en een punt *P* niet op *m*. Kies op *m* de punten A_1 en A_2 en teken de incirkel van driehoek PA_1A_2. Laat *r* de straal van deze incirkel zijn. Teken dan de cirkel, *ook* met straal *r* , die raakt aan PA_2 en aan *m*. Deze cirkel is de incirkel van driehoek PA_2A_3 met A_3 op *m*.
Herhaling van dit proces geeft een rij aaneengesloten driehoeken PA_nA_{n+1} die alle een incirkel hebben met straal *r* (generatie 1); ***zie figuur 2***.



figuur 2

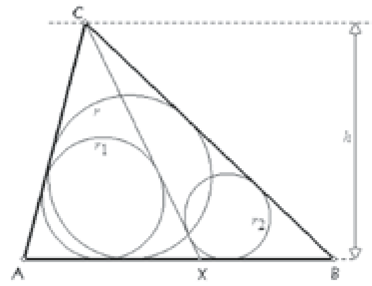
Tekenen we nu de incirkels van de driehoeken PA_nA_{n+2} (generatie 2), dan lijken die ook allemaal een even grote straal r_2 te hebben. En de driehoeken PA_nA_{n+k} hebben incirkels die allemaal dezelfde straal r_k hebben (generatie *k*); ***zie figuur 3***.



figuur 3

Eerste vorm van stelling 1

Onlangs, bij het surfen op het internet, kwam ik de cirkels van figuur 2 weer tegen op een pagina van de website van Alexander Bogomolny [1], die ook het boek van Wells [3] noemt. Een van de referenten wees mij erop dat de cirkels ook voorkomen in [2; Honsberger], waar met een algebraïsch bewijs de juistheid van figuur 3 aangetoond wordt.
Bovendien merkt Bogomolny op dat Honsberger alleen groepen van 2^n cirkels beschouwde, terwijl uit stelling 1 volgt dat *elk n*-tal opvolgende driehoeken incirkels leveren (generatie *n*) met gelijke straal, zoals ***in figuur 3***; en ***zie ook figuur 12***.
Oorspronkelijk kwam ik tot de volgende stelling (***zie figuur 4***):



figuur 4

Stelling 2 – *Als X een punt is op zijde AB van driehoek ABC en r, r_1, r_2 de stralen zijn van de incirkels van de driehoek ABC, AXC en BCX, dan geldt de volgende relatie:*

(2a)… $r = r_1 + r_2 - \frac{2}{h}r_1r_2$

waarin h de lengte is van de hoogtelijn uit C.
Omdat (2a) te schrijven is als:

(2b)… $1-\frac{2r}{h}=(1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h})$

kan je hierin een begin van stelling 1 zien.
Tevens ontstaat de vraag: waarom hebben de factoren deze vorm?
Omdat ik een algebraïsch bewijs vond - zoals Honsberger - ontstond geen inzicht over de achtergrond.

Een meetkundig bewijs

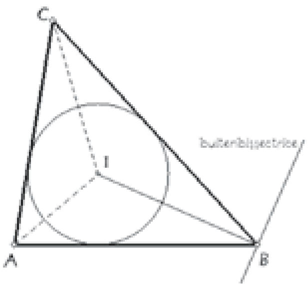
Een eerste versie van dit artikel stuurde ik naar Aad Goddijn, werkzaam op het Freudenthal Instituut en bekend om zijn meetkundig inzicht.
Hij ontdekte – met in driehoek *ABC* ook een variabel punt *X* op *AB* (***zie figuur 4***) en het gebruik van de stelling van Brianchon (*bij een raaklijnenvierhoek aan een cirkel gaan de diagonalen en de verbindingslijnen van overstaande raakpunten door één punt*) – dat de factor $1-\frac{2r}{h}$ gelijk is aan tan(½α) · tan(½β).
Daarna lag de weg open voor een simpel meetkundig bewijs van stelling 1. Dat bewijs vond Goddijn ook, maar we geven hier een naar onze smaak meer elementair bewijs.
Daartoe bewijzen we dus eerst:

Stelling 3 – *In elke driehoek ABC geldt:*

$\tan(\frac{1}{2}\alpha)\cdot\tan(\frac{1}{2}\beta)=1-\frac{2r}{h}$

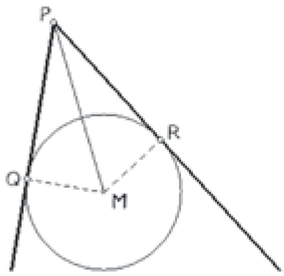
waarin r de lengte is van de straal van de incirkel en h de lengte van de hoogtelijn uit C.

Om het bewijs daarvan voor iedereen duidelijk te maken hebben we een paar eenvoudige eigenschappen (E1, E2, E3, E4) nodig van bissectrices, incirkels en raaklijnstukken. We geven ze met een korte uitleg.



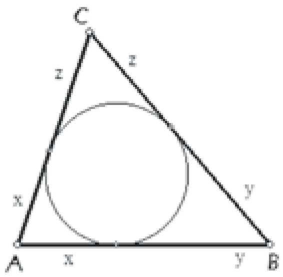
figuur 5

E1 – *zie figuur 5*. De bissectrices van driehoek ABC gaan door één punt I, het middelpunt van de incirkel. En de hoek tussen een binnen- en buitenbissectrice is 90° (immers gelijk aan de helft van een gestrekte hoek).



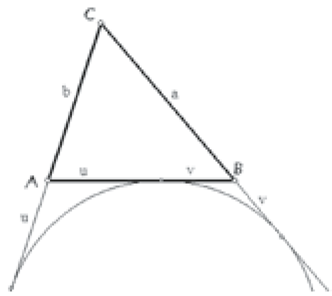
figuur 6

E2 – *zie figuur 6*. Raaklijnstukken vanuit een punt aan een cirkel zijn gelijk: PQ = PR. Immers, de driehoeken PMW en PMR zijn congruent $\Delta PAM \cong \Delta PBM$ (ZZR), of bedenk dat PM symmetrie-as is.



figuur 7

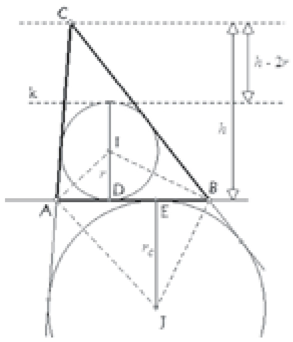
E3 – *zie figuur 7*. Als a, b, c de lengtes van de zijden zijn en x, y, z de lengtes van raaklijnstukken aan de incirkel en s = *semiperimeter* = ½ · omtrek = ½$(a + b + c)$, dan is (en gebruik E2):
$x + y + z = s$
Hieruit volgt: $x = s - (y + z) = s - a$, en zo ook: $y = s - b$, $z = s - c$.



figuur 8

E4 – *zie figuur 8*. De raaklijnstukken aan de uitcirkel vanuit C zijn (volgens E2) gelijk: $b + u = a + v$
Omdat $c = u + v$ is, volgt $b + (c - v) = a + v$.
Vervolgens is dan $b + c = a + 2v$, of $2a + 2v = a + b + c = 2s$.
Conclusie: $v = s - a$, en ook $u = s - b$.

Een bewijs van stelling 3 kan nu gegeven worden met de formule van Heron (die de oppervlakte van een driehoek uitdrukt in de zijden), maar het kan ook met alleen gelijkvormigheid.



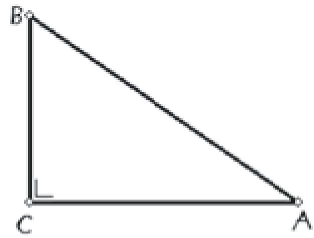
figuur 9

Bewijs van stelling 3 – *zie figuur 9*. We tekenen driehoek ABC met de incirkel (middelpunt I, straal r) en de uitcirkel bij C (middelpunt J, straal r_c), bissectrices AI en BI, de raaklijn k aan de incirkel evenwijdig met AB, door I en J loodlijnen op AB (snijpunten met AB zijn D en E).
Dan is, met E3:
(3a)… $\tan(\tfrac{1}{2}\alpha) = \dfrac{ID}{AD} = \dfrac{r}{s-a}$

Uit E1 volgt dat $\angle BJE = \tfrac{1}{2}\beta$, zodat met E4:
(3b)… $\tan(\tfrac{1}{2}\beta) = \dfrac{BE}{JE} = \dfrac{s-a}{r_c}$

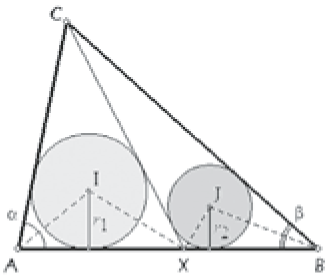
Vermenigvuldigen van (3a) en (3b) geeft dan:
(4)… $\tan(\tfrac{1}{2}\alpha)\cdot\tan(\tfrac{1}{2}\beta) = \dfrac{r}{r_c}$
Vermenigvuldiging ten opzichte van C met deze factor heeft tot gevolg dat de uitcirkel overgaat in de incirkel, en ook gaat de lijn AB daarbij over in lijn k.
Omdat dit ook bewerkstelligd wordt door de vermenigvuldiging met de factor $\dfrac{h-2r}{h}$ (t.o.v. C), moeten de factoren gelijk zijn:
(5)… $\dfrac{r}{r_c} = \dfrac{h-2r}{h} = 1 - \dfrac{2r}{h}$

Combinatie van (4) en (5) geeft dan het bewijs van stelling 3.◊



figuur 10

Bewijs van stelling 1 – De sleutel van dit bewijs ligt in de volgende (eenvoudige) eigenschap.
E5 – *zie figuur 10*. Voor een scherpe hoek A geldt:
$\tan(\angle A)\cdot\tan(90° - \angle A) = 1$
Immers uit de definitie van 'tan' volgt dat: $\tan(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$ en dat $\tan(\angle B) = \dfrac{AC}{BC}$.
Dus geldt, wegens $\angle B = 90° - \angle A$:
$\tan(\angle A)\cdot\tan(90° - \angle A) = 1$.
Voor het bewijs van stelling 1 kijken we eerst naar een driehoek met maar één lijn 'naar de overkant'; ***zie figuur 11***.



figuur 11

Als r_1 de lengte van straal van de incirkel van driehoek AXC is en r_2 die van driehoek XBC, dan is met stelling 3:
(6)… $\tan(\tfrac{1}{2}\alpha)\cdot\tan(\angle IXA) = 1 - \dfrac{2r_1}{h}$

(7)… $\tan(\angle JXB)\cdot\tan(\tfrac{1}{2}\beta) = 1 - \dfrac{2r_2}{h}$

IX en JX zijn binnen- en buitenbissectrice, dus $\angle JXB = 90° - \angle IXA$. Dan is:
$\tan(\angle IXA)\cdot\tan(\angle JXB) = 1$
Vermenigvuldigen we (6) en (7) dan volgt:
(8)… $\tan(\tfrac{1}{2}\alpha)\cdot\tan(\tfrac{1}{2}\beta) = (1 - \dfrac{2r_1}{h})(1 - \dfrac{2r_2}{h})$

Het linkerlid van (8) is gelijk aan $1-\dfrac{2r}{h}$ (zie stelling 3), zodat:

$$1-\frac{2r}{h}=(1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h})$$

Dus is wat in stelling 1 staat voor $n = 2$, bewezen.

Bij meer lijnen vanuit *C* naar *AB* is steeds: tan(‘*bissectrice*’) · tan(‘*buitenbissectrice*’) = 1, zodat volgt:

$$\tan(\tfrac{1}{2}\alpha)\cdot\tan(\tfrac{1}{2}\beta)=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{2r_k}{h})$$

Waarmee stelling 1 bewezen is.◊

Gevolgen

Keren we terug naar de ‘cirkels van Wells’ (***in figuur 2***), waarbij de 1e generatie cirkels alle straal *r* hebben, dan zien we dat de stralen van de 2e generatie voldoen aan:

$$1-\frac{2r_2}{h}=(1-\frac{2r}{h})^2$$

en dus ook alle gelijk zijn.
Generatie $(k + 1)$ krijgen we door combinatie van $(k + 1)$ driehoeken. Neem eerst *k* driehoeken; dat levert een cirkel van generatie *k* en voeg dan nog een driehoek van generatie 1 toe.
Zo volgt dus:

$$1-\frac{2r_{k+1}}{h}=(1-\frac{2r_k}{h})(1-\frac{2r}{h})$$

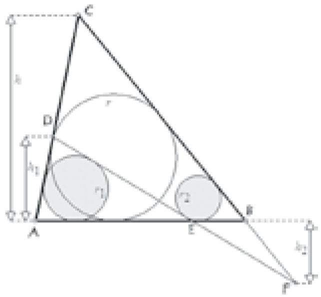
Zodat eenvoudig met inductie uit (2b) volgt:

$$1-\frac{2r_{k+1}}{h}=(1-\frac{2r}{h})^{k+1}$$

Maar we hebben al gezien (***in figuur 11***) dat de stralen helemaal niet gelijk hoeven te zijn bij het gebruik van de formule van stelling 1. Nemen we voor de 1e generatie opvolgend de stralen r_1 en r_2 , dan heeft de 2e generatie allemaal incirkels met gelijke straal, zoals direct uit formule (1) volgt.
En kiezen we *N* cirkels met stralen r_1, …, r_N als start van de 1e generatie, en herhalen we dit patroon van *N* cirkels, dan heeft de *N*-de generatie allemaal cirkels met gelijke straal; ***zie de figuren 12a, 12b, 12c*** voor $N = 2$, 3 en 4.

Tot slot

We kunnen ‘Wells’ ook helemaal loslaten en naar een willekeurige transversaal van driehoek *ABC* kijken, zoals ***in figuur 13***. Uitgangspunt is driehoek *ABC* waarvan de lengte van de straal van de incirkel gelijk is aan *r* en de lengte van de hoogtelijn uit C gelijk is aan *h*.



figuur 13

In de figuur is de transversaal *DE* getekend die het verlengde van *CB* snijdt in *F*. Is r_1 de straal van de incirkel van driehoek *AED* en h_1 de hoogtelijn uit *D*. Is vervolgens r_2 de straal van de cirkel die raakt aan *AB*, *BC* en *DE* en aan dezelfde kant van *AB* ligt als het punt *D*. En is h_2 de hoogtelijn uit *F* van driehoek *EBF*.
Misschien vindt u het leuk om zelf te bewijzen dat in deze situatie geldt:

$$1-\frac{2r}{h}=\left(1-\frac{2r_1}{h_1}\right)\left(1+\frac{2r_2}{h_2}\right)$$

Noten

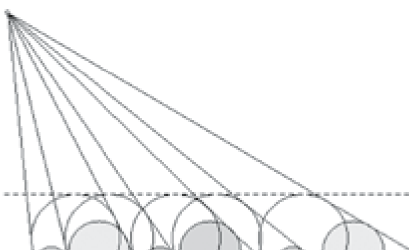
[1] Alexander Bogomolny: *Equal Incircles Theorem*.
Op: *www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AdjacentIncircles.shtml* .

[2] R. Honsberger (2004): *Mathematical Delights (Dolciani Mathematical Expositions, Nr 28)*. Washington D.C. (USA): The Mathematical Association of America. Daarin op pp. 187-191: *A Curious Result in Geometry*.

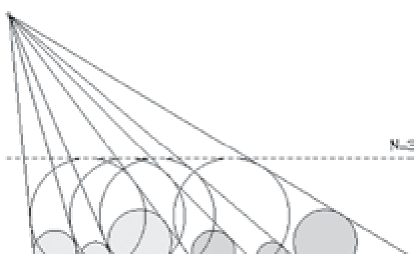
[3] D.G. Wells (1991): *Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. London: Penguin Books. Het boek is vertaald in het Nederlands: *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde* (Amsterdam: Bert Bakker). De onderhavige cirkels staan daarin op pag. 101 (zonder bewijs).

Over de auteur

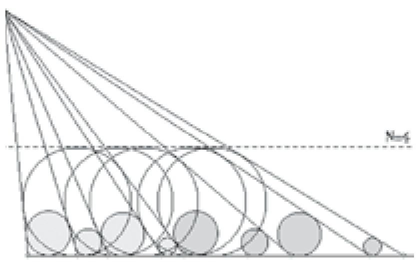
Paul Dillo is als wiskundeleraar verbonden aan het Fons Vitae Lyceum in Amsterdam.
E-mailadres: *dillo@fonsvitae.nl*



figuur 12a



figuur 12b



figuur 12c

Moet dat zo? Kan het niet anders?

[Sieb Kemme]

Rekenen

Naar aanleiding van het rapport van de Commissie Dijsselbloem beloofde de overheid om nooit, maar dan ook nooit meer van bovenaf het onderwijs te beregelen. Maar het overheidsgeheugen is een kortetermijn-geheugen, want per 1 augustus 2010 is het rekenonderwijs in Nederland bij wet geregeld en vanaf dat ogenblik wordt er weer een heel circus over het onderwijs uitgerold.

Vanuit vele hoeken en gaten uit de samenleving komen geluiden dat het slecht gesteld is met het rekenniveau van de Nederlander. Om maar wat te noemen:

- Een niet verwaarloosbaar aantal leerlingen verlaat de basisschool, terwijl hun rekenniveau niet verder reikt dan dat van groep 6.
- Afgestudeerden van de pabo kunnen vaak de sommen van groep 8 niet maken.
- Het gebrek aan elementaire rekenvaardigheden belemmert een ontwikkeling naar de algebra in havo en vwo.

Ter ondersteuning een voorbeeld, een reactie op de opgaven van *www.rekenbeter.nl*:

'In uw opgaven van vandaag staat o.a. de opgave: 3,25 – 3,20 + 0,75.
U zegt dat het juiste antwoord 0,80 is.
Maar in mijn beleving is dat 0,70. Vroeger (lang geleden) geleerd: Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord. Dus eerst optellen 3,20 + 0,75 = 3,95. En dan 3,95 – 3,25 = 0,70. Gaarne uw mening.'
Mijn *Reply*: 'Uw reactie toont wel aan dat het goed mis is met die oude regel van Van Dalen. Als het om geld ging zou u het wel weten, dan kwam er 0,80 uit: U hebt € 3,25, geeft € 3,20 uit en ontvangt € 0,75. Wat zit er nu in uw portemonnee?'
En de daaropvolgende *ReReply*: "Ik vind uw antwoord niet kloppen, want ik kan het ook omdraaien: U krijgt van iemand 3,20 van een ander 0,75 zodat u 3,95 in de knip heeft en dan moet u iemand 3,25 betalen. Dan heeft u echt nog maar 0,70 over. Ergens denk ik dat beide antwoorden juist (kunnen) zijn.'

Helaas is dit geen uitzondering. Die vermaledijde regel van Meneer Van Dalen komt regelmatig terug, zelfs van rekendocenten aan de pabo. Een goede tweede in misverstanden is het misbruik van de afrondregel. Elke docent zal die herkennen bij het herhaald afronden door leerlingen die van een 5,45 via 5,5 een 6 weten te maken.

Eén belangrijke oorzaak ligt voor het oprapen. Tot voor kort bestond ongeveer de helft van de instroom van de pabo uit afgestudeerden van het mbo. Op basis van hun diploma hadden ze onbelemmerd toegang. Meestal zijn dit studenten die een mbo opleiding in de zorg hebben gevolgd, voorafgegaan door een vmbo-opleiding Zorg en Welzijn. Dat betekent dat veel van deze leerlingen vanaf leerjaar 2 geen wiskunde meer hebben gehad en dat het voor hen dus minstens zes jaar geleden is dat ze een wiskundesom hebben gemaakt. In combinatie met de ontwikkeling naar een meer op algemene competenties gerichte pabo is het niet verwonderlijk dat de afgestudeerde studenten er niet in zullen slagen dit tekort aan vaardigheden in hun opleiding weg te werken.
Voor wat het rekenen betreft wordt zo de negatieve onderwijsspiraal in gang gehouden. Voor de klas staan docenten die zwak zijn in rekenen. Bijgevolg zullen hun leerlingen ook zwak zijn in rekenen. Bijgevolg zullen de aankomende pabo studenten nog zwakker zijn in rekenen en zo verder.

Jammer!

Reden genoeg dus voor de overheid om zich zorgen te maken. Vandaar dat een commissie van wijze mensen, de Commissie Meijerink, aan het studeren sloeg en in 2008 met een lijvig rapport *Over de drempels met rekenen* aanbevelingen deed over basisniveaus en streefniveaus van het rekenen, vanaf groep 8 tot en met het eind van het voortgezet onderwijs en het mbo. Het rapport eindigt met vijftien aanbevelingen. Deze zijn inhoudelijk van aard. Daarin staat niets over hoe deze reparatieslag moet worden uitgevoerd. En dat is nu zo jammer.
Het rapport geeft met een indeling in fundamentele en streefniveaus aan wat de eisen zijn die we mogen stellen aan het algemene rekenniveau door de jaren heen. Aansluitend hebben de staatssecretaris en de Tweede Kamer bij wet besloten dat er afsluitende rekentoetsen zullen komen die deel gaan uitmaken van de eindexamens voortgezet onderwijs en mbo, te beginnen vanaf schooljaar 2013-2014. Om een en ander mogelijk te maken ontvangen scholen met ingang van 2010-2011 een bedrag per leerling van € 55,50 in het voortgezet onderwijs en van € 15,50 in het primair onderwijs. Vervolgens wordt het hele circus van ondersteunende instellingen opgetuigd. Met een stevige buidel geld zijn ze al vlijtig aan de slag met het produceren van toetsen, voorbeeldexamenopgaven en het verder uitwerken van het rapport van Meijerink in eindtermen met voorbeelden.
Een apart ingericht *Steunpunt Taal & Rekenen* trok de afgelopen maanden door het land met bijeenkomsten voor de taal- en rekendocenten in het voortgezet onderwijs. Soortgelijke bijeenkomsten voor de basisscholen zullen volgen.
Uit de bijeenkomsten voor het vo ontstaat het volgende beeld.

- Het beschikbare geld wordt soms ten dele besteed aan extra formatie voor rekenonderwijs.
- Het rekenen wordt bij sommige scholen bij wiskunde ingeschoven.
- Het rekenen gaat ten koste van uren voor wiskunde.
- Docenten willen nu al weten hoe het examen eruit gaat zien.

Belangrijker is dat het vo wordt 'opgescheept' met het gedifferentieerde rekenniveau van groep acht van de basisschool. Docenten zullen hun handen vol hebben om in het eerste leerjaar de achterstand ten opzichte van het verwachte 1F-niveau bij hun leerlingen weg te werken. In het vmbo zal dat zeker niet lukken bij

leerlingen die in feite het rekenen beheersen op het niveau van groep 6.

Effectief?

Er wordt dus hard gewerkt en met de beste bedoelingen, maar effectief zal het niet zijn. Want hoe gaat dat straks? Het antwoord op die vraag zal voor havo/vwo anders zijn dan voor het vmbo.
Het overduidelijke gegeven dat de rekenachterstand van veel vmbo-leerlingen niet in één jaar weg te werken zal zijn, biedt vmbo-docenten de mogelijkheid om directies ervan te overtuigen dat een doorgaande rekenlijn voor alle sectoren vanaf leerjaar 1 tot en met het rekenexamen in leerjaar 4 een absolute noodzaak is. Dus ook voor die sectoren waarin leerlingen nu na het tweede leerjaar wiskunde kunnen laten vallen.
Voor havo en vwo zal die noodzaak van een doorgaande rekenlijn veel minder duidelijk gevoeld worden. In leerjaar 1 zal er misschien nog gerekend worden om daarna over te gaan op de orde van het bestaande wiskundeprogramma. De rekenexamens worden toch pas in het examenjaar afgenomen. Direct voorafgaand aan het examen gaan de rekenboeken dus weer open, want dat biedt de meeste kans op succes. Maar zo schieten we niks op. Want rekenen moet je onderhouden door regelmatig en in variatie te blijven oefenen. Leerlingen die in leerjaar 1 hebben gerekend en daarna pas weer als voorbereiding voor het rekenexamen, zullen na zes weken vakantie hun verworven vaardigheid weer volledig kwijt zijn.
Daarnaast dreigt ook dit onderwijs weer volledig dichtgetimmerd te worden met fijnmazige eindtermen, met bijpassende voorbeelden en pilot-examens. Het materiaal van de educatieve uitgeverijen zal hierbij aansluiten. Het gevolg is dat we weer een vorm van 'af-te-vinken' onderwijs krijgen. Alles keurig op het voorgedefinieerde niveau en passend binnen het juiste onderwerp. Voor een zaakvak is dat misschien te verdedigen. Misschien. Rekenen vraagt in het aanbod een zekere flexibiliteit zodat leerlingen er wendbaar in het dagelijks leven mee uit de voeten kunnen. Praktisch gezien: er mag best eens een opgave voorbij komen die onverwacht moeilijk is en niet bij voorbaat al is voorgekauwd. Mits er voldoende structuur en succesbeleving overblijft.

Als ik minister was...

Als ik minister of staatssecretaris was, dan wist ik het wel. Dan zou ik om te beginnen de bekostiging per leerling omdraaien: € 55,50 naar het primair onderwijs en € 15,50 naar het voortgezet onderwijs. Want het echte probleem ligt in de basisschool. Veel van dat geld zou ik steken in nascholing van basisschooldocenten, zodat zij, binnen werktijd en bij voorkeur op de werkplek, hun rekenvaardigheden en rekendidactiek zo snel mogelijk op peil kunnen brengen. Ik zou het voortgezet onderwijs pas met de rekenklus belasten als de instromende leerlingen voldoende op rekenniveau zijn. Dat zou best een paar jaar kunnen duren. In plaats van centrale rekenexamens zou ik jaarlijkse rekendossiers per leerling invoeren. Dat kunnen digitale dossiers zijn, gebaseerd op digitale toetsen, waaruit blijkt dat de leerlingen met regelmaat rekenen en zich in de loop van hun schoolcarrière naar het gewenste rekenniveau hebben gerekend.
Als ik dan toch bezig ben, zou ik meer geld steken in het vanuit onderwijspraktijk ontwikkelen van veelbelovende innovatieve producten, dan in het tot op de komma nauwkeurig uitschrijven van een leerplan voor rekenen dat het onderwijs wordt opgelegd.

Over de auteur

Sieb Kemme studeerde wiskunde, gaf les aan leerlingen en studenten en houdt zich bezig met de ontwikkeling van lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs. Van 2007 tot 2009 was hij als projectleider van cTWO ook betrokken bij beleidsmatige ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Als beginnend pensionado nam hij onlangs het initiatief tot de website *rekenbeter.nl*.
E-mailadres: *skemme@educadbv.nl*

Vanuit de oude doos

A^{o} 1925 / 26

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw – tot in de tweede wereldoorlog – in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, mogelijk met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer een portie trigonometrie en twee algebraïsche toetjes.
Misschien vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. En vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerking aan.

Opgave 1 (1926)

In driehoek *ABC* is de bissectrix van hoek *C* driemaal zo lang als de projectie van *b* op *a*. Bereken de hoeken van die driehoek als $\angle C = 60°$.

Opmerkingen

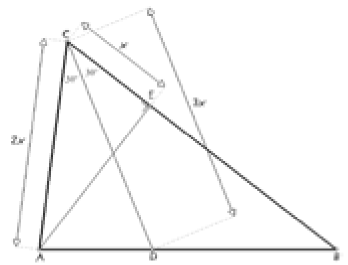
- Met *bissectrix* wordt hierboven bedoeld: de lengte van het deel van de deellijn van hoek *C* dat zich binnen driehoek *ABC* bevindt.
- *a* is de lengte van de zijde *BC*; *b* is de lengte van *AC*.

Opgave 2 (1925)

De vergelijkingen
$x^2 - ax + 7b = 0$ en
$bx^2 - 3ax + 7 = 0$
hebben een wortel gemeen, terwijl de beide andere wortels elkaars omgekeerden zijn.
Bepaal *a* en *b* en de wortels.

Opgave 3 (1925)

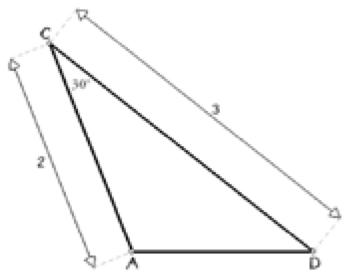
Bepaal $\frac{2x^2 - y^2}{3xy}$ als *x* en *y* voldoen aan de vergelijkingen
$2x^2 - 3xy - y^2 = 1$ en $5x^2 - 7xy - 4y^2 = 2$
zo mogelijk zonder *x* en *y* zelf te bepalen.



figuur 1

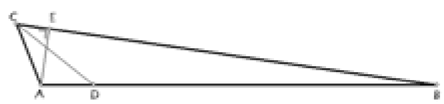
Uitwerkingen

Opgave 1 – Laten we eens beginnen met een werkschets; ***zie figuur 1***.



figuur 2

Aangezien driehoek *ACE* een 30-60-90-driehoek is, is *AC* twee keer zo lang als *CE*, de projectie van *b* op *a*. Gegeven is dat *CD* drie keer zo lang is als *CE*. Met deze gegevens kunnen we driehoek *ACD* op schaal tekenen; ***zie figuur 2***.



figuur 3

En in die figuur is te zien dat hoek *A* stomp is. We passen de werktekening hierop aan; ***zie figuur 3***.

Wanneer we in deze tekening $CE = x$ stellen, geldt dus: $AC = 2x$ en $CD = 3x$.
Bereken nu *AD* met de cosinusregel in driehoek *ACD*:
$AD^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(3x)\cdot\cos 30°$
Waaruit volgt: $AD = x\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$.

Hierna kan de sinusregel worden toegepast in deze driehoek:

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{CD}{\sin A} \Rightarrow \frac{x\sqrt{13-6\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = \frac{3x}{\sin A}$$

Waaruit volgt: $\sin A = \frac{1\frac{1}{2}}{\sqrt{13-6\sqrt{3}}}$, waarbij de hoek stomp is.
Dus $\angle A = 111{,}738°$ en $\angle B = 8{,}262°$.
In de notatie van toen: $\angle A = 111°44'17''$ en $\angle B = 8°15'43''$.

Opgave 2 – Stel de wortels van de eerste vergelijking zijn: $x = p$ en $x = q$. En van de tweede vergelijking: $x = p$ en $x = \frac{1}{q}$.
De eerste vergelijking moet gelijk zijn aan: $(x - p)(x - q) = 0$.
Uitwerken geeft: $x^2 - (p + q)x + pq = 0$.
Vergelijk de coëfficiënten hiervan met de oorspronkelijke vergelijking; dan volgt:

$$\begin{cases} p + q = a & \text{(1)...} \\ p\cdot q = 7b & \text{(2)...} \end{cases}$$

De tweede vergelijking moet gelijk zijn aan: $b(x - p)(x - \frac{1}{q}) = 0$.
Uitwerken geeft: $bx^2 - b(p + \frac{1}{q})x + \frac{bp}{q} = 0$.
Vergelijk de coëfficiënten hiervan met de oorspronkelijke vergelijking; dan volgt:

$$\begin{cases} b(p + \frac{1}{q}) = 3a & \text{(3)...} \\ \frac{bp}{q} = 7 & \text{(4)...} \end{cases}$$

Eliminatie van *b* in (2) en (4) geeft:
$p^2q = 49q$.
Aangezien $q \neq 0$ is, geldt dus:
$p = -7$ of $p = 7$.
Het is nu eenvoudig het stelsel op te lossen.
Dit resulteert in:
$p = -7$, $q = -5$, $a = -12$, $b = 5$, of:
$p = 7$, $q = 5$, $a = 12$, $b = 5$

Opgave 3 – Ook in deze opgave moeten we proberen een handige substitutie te vinden vanuit de twee gegeven vergelijkingen. Je zou bijvoorbeeld de gemengde term met xy kunnen elimineren. Dit levert op:
$x^2 = 5y^2 - 1$
Maar die vergelijking nodigt niet uit om te substitueren in de gegeven breukuitdrukking. Ook levert het elimineren x^2 of y^2 niet snel iets op.
Maar je kunt ook de eerste vergelijking verdubbelen, en dan het verschil met de tweede vergelijking nemen! Dit geeft het stelsel:

$$\begin{cases} 4x^2 - 6xy - 2y^2 = 2 \\ 5x^2 - 7xy - 4y^2 = 2 \end{cases}$$

De verschilvergelijking is: $x^2 - xy - 2y^2 = 0$.
En deze kun je ontbinden: $(x - 2y)(x + y) = 0$. Dus: $x = 2y$ óf $x = -y$.
Substitutie in de breukvorm geeft dan:

$$\frac{2\cdot(2y)^2 - y^2}{3\cdot 2y\cdot y} = \frac{7y^2}{6y^2} = \frac{7}{6} \text{ of:}$$

$$\frac{2\cdot(-y)^2 - y^2}{3\cdot(-y)\cdot y} = \frac{y^2}{-3y^2} = -\frac{1}{3}$$

mits $x \neq 0$ én $y \neq 0$.

Bron
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Aankondiging / NOT 2011

Vakbeurs voor onderwijsprofessionals

De NOT is dé vakbeurs voor onderwijsprofessionals. Nergens anders is er zo'n compleet aanbod voor onderwijssegmenten. Van basis tot middelbaar, van Dalton tot Vrije School: ruim 500 exposanten brengen u het nieuwste uit de markt.
Multimediale ontwikkelingen, nieuwe relevante software, het 'mediawijs' maken van peuters en hoe om te gaan met multitaskende leerlingen met infobesitas, …
De NOT zit boven op trends in het onderwijs en na een bezoek bent u weer helemaal bij.
Tal van congressen en workshops verhogen de kennis van uw professie en houden u actueel. Over hoe je 'educatief gamen' bijvoorbeeld in het onderwijs kunt integreren.

Praktische informatie
Data: dinsdag 25 tot en met zaterdag 29 januari 2011
Openingstijden: dagelijks geopend van 9:30–17:00 uur
Locatie: Jaarbeurs Utrecht, hal 7 t/m 12
Website: *www.not-online.nl*

Segmenten
De beurs bestaat uit verschillende segmenten, zodat bezoekers makkelijk hun weg kunnen vinden binnen het brede aanbod van de NOT. De zes hallen zijn verdeeld in de volgende segmenten.
Hal 7 – Bouw, Facilitair & Inrichting, deel Management, Advies & Organisatie + Innovatiestand NOT, Groene Route en Veiligheidsroute
Hal 8 – Management, Advies & Organisatie, waaronder (Bij/na)scholing Route, deel Leren & onderwijzen met ICT
Hal 9 – Leren & onderwijzen met ICT
Hal 10 – Leermiddelen en Materialen, met de activiteiten: Kinderboekenstraat, Dyslexiestraat, Techniekstraat, Wereldplein, Gaming Route
Hal 11 – Educatieve uitgeverijen en Leermiddelen en Materialen, Gaming Route
Hal 12 – Leermiddelen en Materialen en Dagtrips, Theater & Cultuur, met activiteiten Cultuurpaviljoen (onder voorbehoud), Stichtingenstraat (onder voorbehoud), Gaming Route

Online registreren
Leden van de NVvW kunnen de NOT **gratis** bezoeken.
Aanmelding daarvoor via de website van het Platform VVVO (*www.platformvvvo.nl*) of de NOT-website is dan noodzakelijk.

AlgebraKIT ontwikkeld door Martijn Slob

INTERVIEW

[Wim Laaper]

foto 1 Martijn Slob

Ik stap de lift in van het hoofdgebouw van de Technische Universiteit Eindhoven. Vroeger zat ik op vloer 1, bij de vakgroep Technische Mechanica. Meerdere keren per dag vloog ik met een ponsband zo groot als een filmrol op en neer naar vloer 9 waar de grote computer was opgesteld. Nu ben ik onderweg naar Martijn Slob van de faculteit Wiskunde en Informatica.
Op vloer 8 kom ik binnen in een kleine sobere werkruimte met aan zijn bureau, achter de computer, Martijn Slob (***zie foto 1***). In 1997 is hij afgestudeerd aan deze faculteit. Daarna heeft hij 5 jaar gewerkt in het bedrijfsleven bij ASML, een Nederlands hightech bedrijf en een van de belangrijkste leveranciers van machines voor de half-geleiderindustrie, in het bijzonder steppers en scanners, die worden gebruikt bij het maken van chips.
Het onderwijs bleef hem toch trekken, hij wou ook meer met mensen werken en niet alleen met technische apparaten bezig zijn. Dus vertrok hij voor 5 jaar naar het Willibrord Gymnasium in Deurne. Geconfronteerd met het gebrek aan algebraische vaardigheden bij de leerlingen kreeg hij daar het idee AlgebraKIT te ontwikkelen. Nu werkt hij bij Wiskunde en Informatica op het instituut LIME [1] voor consultancy aan bedrijven. Zijn hobby, AlgebraKIT voor het voortgezet onderwijs, bouwt hij nog steeds verder uit.

Hoe ben je op het idee gekomen om je AlgebraKIT te ontwikkelen?

Ik voelde me in eerste instantie gewoon uitgedaagd om een computeralgebra programma te schrijven. Ik besloot de content (oplosstrategieën en notaties) volledig te scheiden van het programma zelf. Pas later bedacht ik dat het programma daardoor bij uitstek geschikt zou zijn voor het onderwijs, waar je met verschillende niveaus te maken hebt. Vanaf dat moment ben ik me gaan richten op het onderwijs en ontstonden de andere uitgangspunten van AlgebraKIT: stap-voor-stap uitwerkingen, genereren van opgaven, het gebruik zo eenvoudig mogelijk maken.
Na drie jaar ontwikkeling was AlgebraKIT zo ver dat het door anderen gebruikt zou kunnen worden. Ik heb toen contact gezocht met Johan Gademan, voorzitter van Math4All, en hij reageerde eigenlijk meteen enthousiast. Math4All heeft sindsdien geholpen met het verbeteren van de uitleg en opgaven, de vormgeving en het idee van de AlgebraKIT-Trainer. Daarnaast hebben zij er voor gezorgd dat AlgebraKIT onder de aandacht kwam.
AlgebraKIT is een Computer Algebra Systeem (CAS) voor het trainen van de algebraïsche vaardigheden in het voortgezet onderwijs (havo en vwo). Veel leerlingen zijn onzeker wat betreft hun algebraïsche vaardigheden en lopen regelmatig vast bij het zelfstandig oefenen met opgaven. Met AlgebraKIT probeer ik hierin een tussenschakel te zijn. Een laagdrempelige, oneindig geduldige coach die je kan helpen bij het oplossen van opgaven, of bij de voorbereiding op een proefwerk of examen. Je kunt oefenen zonder afhankelijk te zijn van de terugkoppeling door de docent.

Wat zijn de belangrijkste eigenschappen van AlgebraKIT?

De KIT is:
- eenvoudig in het gebruik;
- heeft een onuitputtelijke bron van opgaven;
- levert stap-voor-stap oplossingen;
- geeft uitleg bij elke stap;
- is aan te passen aan de doelgroep.

AlgebraKIT hoeft niet te worden geïnstalleerd op je computer maar werkt direct vanuit de browser. Op de site *www.algebrakit.nl* (of *www.math4all.nl*) kan je AlgebraKIT vinden en starten.

Wat kan je met AlgebraKIT en wat niet?

AlgebraKIT geeft geen assistentie op bijvoorbeeld de onderwerpen meetkunde en statistiek.
AlgebraKIT kan voor jou wel vergelijkingen oplossen, met breuken rekenen, herleiden, differentiëren, integreren, enz. Je kunt met AlgebraKIT niet alleen het antwoord zien, maar ook de tussenstappen oproepen, eventueel voorzien van uitleg. Je kan de gegeven oplossing vergelijken met de oplossing van de opgave zoals je die met pen en papier hebt uitgewerkt. Je hoeft dus niet de oplossing in te voeren zodat je je niet druk hoeft te maken over hoe dat zou moeten. Daar staat tegenover dat je dus geen directe terugkoppeling tussendoor krijgt op de oplossing wat, omdat het doel oefenen is, ook niet nodig is. Bij nieuwe stukken leerstof die worden opgebouwd, is een continue terugkoppeling wellicht wel wenselijk. Veel programma's, bijvoorbeeld ontwikkeld door het Freudenthal Instituut, werken zo. Maar AlgebraKIT is een programma dat het oefenen ondersteunt. Doordat het niet terugkoppelt naar de oplossing is het heel gebruiksvriendelijk en laagdrempelig en bovendien helemaal gratis.

Kan je een voorbeeld geven van een opgave met uitwerking en uitleg erbij?

Op de computer tovert Martijn een kwadratische drieterm te voorschijn die ontbonden moet worden. Hoe dat gaat is te zien in de figuren 1 tot en met 4.

Is het ook mogelijk je algebraïsche vaardigheden in een toets te testen met het programma?

Onlangs is de eerste versie van een toetsgenerator beschikbaar gekomen op de site

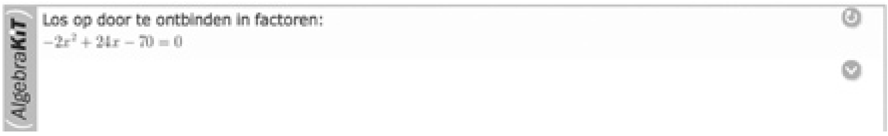
van AlgebraKIT. De toetsgenerator maakt het mogelijk papieren (oefen)toetsen te genereren over alle onderwerpen die AlgebraKIT aanbiedt. Doordat de opgaven automatisch worden gevarieerd, is het mogelijk verschillende toetsen van een onderwerp aan te maken. En uiteraard kan AlgebraKIT ook automatisch de antwoordbladen genereren.
De bedoeling van deze toetsgenerator is dat het gemakkelijker wordt om geregeld met je leerlingen te oefenen. Je zou bijvoorbeeld maandelijks een oefenblad aan je leerlingen mee kunnen geven met opgaven over breuken, of ontbinden, of differentiëren, of een combinatie van dat alles.

Wat zijn de ervaringen met het programma? Zijn er reacties van leraren uit het veld?
Ik merk dat het gebruik steeds meer toeneemt. Aan de bezoeken aan mijn website zie ik dat AlgebraKIT ook in de klas gebruikt wordt. Daarnaast 'AlgebraKITten' leerlingen ook thuis. Docenten reageren heel enthousiast via mijn website.

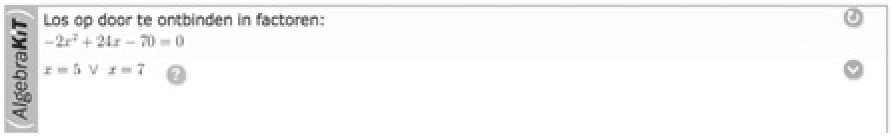
Jouw plannen voor de toekomst?
- De content van het hele havo/vwo-programma inbouwen voor wat betreft algebraïsche vaardigheden. Dat vind ik belangrijker dan het verzinnen van nieuwe snufjes.
- Later wil ik ook gaan werken aan het inbouwen van meerdere oplossingswegen voor een opgave.
- Plaatjes, grafieken, enz. opnemen in het programma.

De grootste hindernis in de verdere ontwikkeling van AlgebraKIT is de factor tijd. Het is een enorme klus om de hele onder- en bovenbouw van het Nederlandse onderwijs af te dekken. En dan zijn er nog varianten denkbaar voor het tweetalig onderwijs, of voor het Belgische onderwijs. Als er mensen zijn die mee zouden willen werken aan het verder uitbouwen van AlgebraKIT, dan nodig ik ze van harte uit om per e-mail contact met me op te nemen (*m.slob@math4all.nl*).

Na deze hartenkreten van een enthousiasteling spoed ik me naar het trappenhuis van vloer 8 om net als vroeger met drie treden tegelijk naar beneden te snellen op weg naar huis. Zo krijg ik fysiek ook nog een lekkere oppepper.

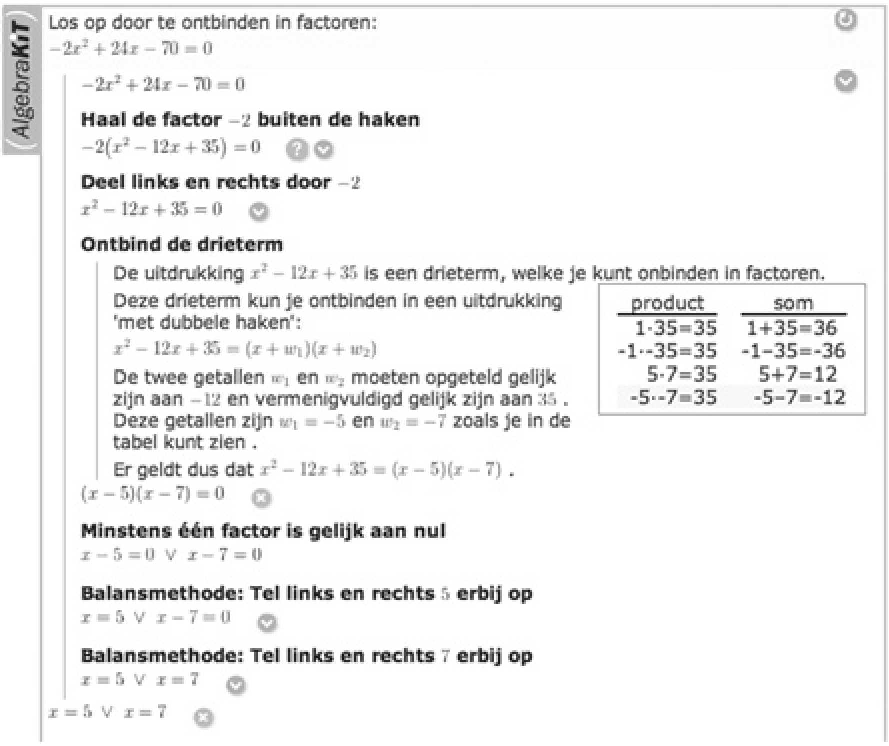


figuur 1



figuur 2

figuur 3



figuur 4

Noot
[1] LIME = Laboratory for Industrial Mathematics Eindhoven

Over de auteur
Wim Laaper is redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *wlaaper@iae.nl*

Differentialen en Diepvriespizza's

[Dorien Lugt]

Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor Euclides over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuis.

Al dan niet gewenst, zeer vruchtbaar

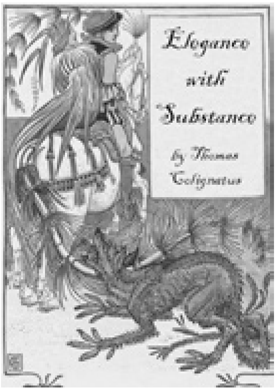
Aangezien 75% van de studenten in Delft mannelijk is, zijn de Delftse jongens maar wat blij met de nabij gelegen studentenstad Leiden. De heren gaan vaak stappen in Leiden met als doel een *Leidse kip* te *regelen* en het is geen uitzondering dat een Delfste herenjaarclub een complete vrouwenclub uit Leiden importeert voor een gala. Dat gaat al tientallen jaren zo.
Misschien was dit gebruik inspiratiebron voor het samenwerkingsverband tussen de wiskundeopleidingen van Leiden en Delft. In het eerste jaar is de opleiding Technische Wiskunde in Delft exact gelijk aan Fundamentele Wiskunde in Leiden. De samenwerking tussen de opleidingen houdt in dat de Leidse studenten het vak Modelleren in Delft komen volgen en de Delftenaren voor het vak Algebra 1 naar Leiden gaan. Het idee hierachter is dat studenten na het eerste jaar pas de keuze hoeven te maken tussen Fundamentele en Technische Wiskunde. Helaas verloopt de samenwerking tussen Leidse en Delftse wiskundestudenten vaak minder vruchtbaar dan de galafeesten soms – al dan niet gewenst – eindigen.
Al voor mijn eerste ontmoeting met een Leidse student, kende ik de feiten. Studenten uit Leiden kunnen niet werken met Matlab en zijn ongelofelijke nerds, zo zeiden de ouderejaars.
Theoretisch wiskundigen noemen ons bouwvakkers en fietsenmakers, vinden Technische Wiskunde voor watjes en zien niets in benaderingen met de computer. We vervuilen hun zuivere wiskunde met onze toepassingen.
De dag waarop de Leidenaren naar Delft zouden komen, zagen we dan ook met tegenzin tegemoet en het theoretische vak Algebra werd al gehaat voor het dictaat ook maar was besteld.
Het verschil tussen Leiden en Delft is in alles merkbaar.
Op de faculteit in Leiden staat een stuk muur tentoongesteld, met daarop handtekeningen van grote wetenschappers uit het verleden. En in de collegezalen hangen zwart wit foto's van oude genieën. Leiden pronkt met bekende wetenschappers die aan hun universiteit hebben gestudeerd. Wanneer je in Delft de 22 verdiepingen tellende faculteit binnenloopt, zie je voornamelijk veel computers. De faculteit heeft de snelste lift van Europa, althans dat verhaal vertellen mensen elkaar graag als ze samen in de lift staan, en een immens hoogspanningslab. Delft pronkt met de raketten en zonnewagens die studenten ontwerpen.
Leiden pronkt met Einstein, Delft met de Nuna.
Het is heel leuk op beide universiteiten de sfeer te proeven. Maar de samenwerking met Leiden heeft ook nogal wat nadelen. Een jaar lang moeten mijn studiegenoten en ik iedere donderdag met de trein naar Leiden om daar college te volgen. Het rooster van Leiden is anders dan het rooster in Delft, waardoor de colleges worden gegeven in onze tentamenweken en de tentamens midden in onze collegeweken vallen.
De projectgroepen van het vak Modelleren moesten voor de helft uit Leidenaren en voor de helft uit Delftenaren bestaan. Als je buiten de projectmiddag met elkaar wilde afspreken om aan het project te werken, moesten de Leidenaren dus speciaal daarvoor naar Delft komen.

Voorzover ik weet heeft er niemand gebruik gemaakt van de mogelijkheid na het eerste jaar nog over te stappen van Leiden naar Delft of andersom. Er is in mijn jaar wel iemand die het keuzevak Algebra 2 volgt in Leiden; ik ben heel blij dat hij die kans krijgt door dit samenwerkingsverband. Dan was het heen en weer laten reizen van al die studenten toch zeker de moeite waard!

Boekbespreking

ELEGANCE WITH SUBSTANCE

[Ger Limpens]



Ondertitel: Mathematics and its education designed for Ladies and Gentlemen
Auteur: Thomas Colignatus
Uitgever: Dutch University Press, 2009
ISBN: 978 90 3610 138 7
Prijs: € 14,95 (112 pagina's)

Dit is geen boek voor lezers van *Euclides*. Dat wil zeggen: het is niet geschreven met wiskundedocenten als doelgroep in gedachten, ondanks het feit dat een deel van de (vertaalde) ondertitel luidt: 'Wat er mis is met wiskundeonderwijs en hoe dat kan worden verbeterd'. Het is niet eens geschreven voor wiskundigen. Toch is in mijn ogen een recensie van dit boek op zijn plaats in dit tijdschrift. En dan niet omdat zoals de auteur zelf aangeeft dat dit boek voor een lezer een argument zou moeten zijn om diens vertegenwoordiger in het parlement (en wie dat dan zou moeten zijn binnen het Nederlandse parlementaire systeem wordt wijselijk verzwegen) aan te schrijven en aldus aan te dringen op een (parlementaire?) enquête. Nee, na lezing van dit boek heb ik zelf niet het idee dat het realistisch is om iets dergelijks te verwachten. Maar toch, het kan geen kwaad om kennis te nemen van een aantal in dit boek verwoorde standpunten.

Thomas Colignatus (bij de burgerlijke stand beter bekend als Thomas Cool, maar als wetenschapper kennelijk liever opererend onder een verlatiniseerde variant daarvan) is van huis uit econometrist en sinds enkele jaren werkzaam in het wiskundeonderwijs. In het voorliggende boek deelt hij zijn ervaringen en denkbeelden opgedaan in dat onderwijs met de geïnteresseerde lezer, en die inzichten zijn hier en daar wel bijzonder te noemen. Zo is hij van mening dat we kinderen in het wiskundeonderwijs soms martelen door ze onlogische notaties en conventies voor te leggen. Denk daarbij aan het gebruiken van de komma dan wel de punt als decimaalscheider. Of de rare conventie om bij een vermenigvuldiging niet altijd het teken voor vermenigvuldiging te gebruiken waardoor iemand erg verward kan raken door te denken aan $2\sqrt{2}$ als hij $2\frac{1}{2}$ ziet en de laatste expressie dus denkt te moeten interpreteren als $2\cdot\frac{1}{2}$ en dit dus 'herleidt' tot 1. Ook het gebruik van het symbool π is in de ogen van Colignatus een leerling-onvriendelijke gewoonte en hij pleit ervoor om daarvoor in de plaats Θ (de Griekse hoofdletter thèta) te gebruiken. Hij definieert dan: $\Theta = 2\cdot\pi$. Mij is hij dan al kwijt want zijn betoog waarom dit helderder zou zijn, ontgaat me. Maar bijzonder is het wel. En daar blijft het niet bij. Hij geeft bijvoorbeeld ook aan dat het wiskundeonderwijs het leerlingen nodeloos moeilijk maakt als het gaat om heel wat ingewikkelder zaken, zoals differentiëren. Om te begrijpen wat differentiëren is, ontkom je meestal niet aan het differentiequotiënt waarbij ook enig begrip van limieten onvermijdelijk lijkt. De Δx of de h die daarbij infinitesimaal klein dient te worden, kan – voordat hij vervangen wordt door 0 – worden weggedeeld in het differentiequotiënt. Maar dat moet je niet zo presenteren, vindt Colignatus. Daar hebben al die grote geesten (Newton, Leibniz, Cauchy en Weierstraß, om er maar een paar te noemen) zich gewoon vergaloppeerd, eigenlijk als gevolg van hun jarenlange wiskundetraining…

Colignatus is de eerste om toe te geven dat hij niet bepaald een uitputtende opsomming geeft van wat er mis is in het onderwijs. En hij beperkt zich daarbij niet tot de inhoud van het huidige wiskundecurriculum (A, B, C of D). Hij komt namelijk ook met suggesties voor nieuwe thema's die van belang zijn. Dat hij daarbij put uit eerder door hem gepubliceerd werk, is dan wel wat typisch, maar goed, het zij hem vergeven; je maakt per slot van rekening gemakkelijk gebruik van eerder zelf bedacht materiaal.

Alles op een rijtje zettend, en daarbij nog bedenkend dat de auteur dit boek niet alleen voor het Nederlandse publiek maar meteen ook voor de wereld geschreven heeft – hij meldt diverse keren dat hij zich voornamelijk baseert op zijn ervaringen in het Nederlandse onderwijsbestel maar tevens geen enkele indicatie heeft dat dit elders in de wereld beter is, los van wat specifieke idiosyncratische voorbeelden die zich ongetwijfeld in ieder land zullen voordoen – krijg je de indruk van doen te hebben met een zonderling.[1] Ik kan dat bevestigen noch ontkennen. Maar dat kan ook heel wel te maken hebben met het feit dat ik niet tot zijn doelgroep behoor. Sterker nog, ik behoor tot de groep mensen die, in de ogen van Colignatus althans, niet in staat is om te kunnen beoordelen wat er mis is met het wiskundeonderwijs en hoe die problemen aangepakt moeten worden. De wijze waarop bijvoorbeeld KWG en NVvW in het Platform Wiskunde Nederland samenwerken, kan absoluut niet door Colignatus' beugel: aldaar is men veel te zeer met zichzelf ingenomen.

Dat het mis is in diens ogen, is me daarentegen wel heel duidelijk geworden. De wereldwijde economische crisis bijvoorbeeld mogen we, althans volgens Colignatus, als wiskundegemeenschap toch op zijn minst gedeeltelijk op ons conto schrijven. U begrijpt: al met al een eye-opener, dit boek. Maar zonder gekheid: hoewel ik absoluut niet geloof in zijn verhaal en ik zijn visie absoluut niet onderschrijf, vind ik dit boek toch zeker de moeite waard. Ook al onderschrijf ik zijn standpunten niet, het kritisch doorlichten van een aantal wiskundige conventies kan geen kwaad. Niet eens zozeer om vervolgens te concluderen dat ze veranderd moeten worden. Maar veeleer om er zelf nog eens over na te kunnen denken en daar weer gebruik van te kunnen maken in het onderwijs.

Tot slot wil ik er wel op wijzen dat sommige inconsistenties me tijdens het lezen behoorlijk gestoord hebben. Een auteur als Thomas Colignatus, die kennelijk hecht aan zuiver en helder taalgebruik, zou zich toch bewust moeten zijn van het feit dat hij in het Engels schrijvend over 'Holland' juist niet verwijst naar Nederland. In de Angelsaksische spreektaalconventie mag dat dan wel gebruik zijn, maar veel zuiverder zou het toch zijn als er gesproken zou worden over 'the Netherlands'. En zo zijn er wel meer onzuiverheden aan te treffen die niet lijken te passen bij 's mans pleidooien voor helderheid. Soms betreffen die wiskun-

dige notaties: Colignatus is bijvoorbeeld een voorstander van een accoladenotatie om de coördinaten van een punt aan te duiden waar we in Nederland 'gewone' haakjes gebruiken – voorbeeld: {2, 3} versus (2, 3)– maar even later blijkt hij er geen punt in te zien om die accoladenotatie ook weer te gebruiken om een verzameling van niet-geordende objecten aan te duiden. En soms betreft het typefouten of vertaalfouten. Kortom, een volgende druk zou er met wat redactionele ingrepen een stuk leesbaarder op worden. Maar daarmee zou hij mij nog niet voor zijn standpunten winnen, zo vermoed ik.

Noot

[1] Zo heb ik me tijdens het lezen diverse keren afgevraagd of de afbeelding op de voorkant van het boek, kennelijk een parafrase op het gevecht tussen Joris en diens draak, niet beter vervangen had kunnen worden door een afbeelding van die Spaanse don in gevecht met een windmolen. Ik ben er nog steeds niet achter.

Over de auteur

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*

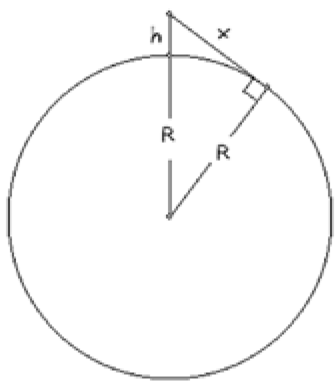
De kunst van het verwaarlozen

[Jeroen Spandaw]

Om wiskunde te kunnen toepassen op de complexe werkelijkheid zijn verwaarlozen, benaderen en vereenvoudigen onontbeerlijke vaardigheden. Natuurwetenschappers worden daar dan ook in getraind bij vakken als 'modelleren' en 'natuurkundig rekenen'. Met wiskundige fijngevoeligheden wordt daar geen rekening gehouden. Toch moeten ook wiskundeleraren eraan geloven, want het examenprogramma schrijft immers voor dat we moeten modelleren in de wiskundeles en daarbij ontkom je niet aan benaderingen.
In de doorsnee-contextopgave wordt een formule gegeven, bijvoorbeeld voor het aantal pretparkbezoekers N op tijdstip t, en vervolgens wordt gevraagd om bij gegeven t de N te bepalen of omgekeerd. Maar dat is geen modelleren, natuurlijk! Bij natuurkunde moeten leerlingen soms een gegeven wiskundig model numeriek doorrekenen met een programma als *Coach* en bij biologie zie je dat leerlingen moeten experimenteren met een gegeven computermodel in *Powersim*. Hoewel dit vaak modelleren wordt genoemd, is het nog steeds slechts een deel van het gehele modelleerproces. Nee, bij écht modelleren start je met een realistisch probleem, moet de leerling zelf vertalen naar een wiskundig model, een wiskundige oplossing afleiden, interpreteren in de context en valideren. Als het model te grof was om de onderzoeksvraag te beantwoorden, dan moet het model verfijnd worden. Het wiskundig model is een idealisatie van de werkelijkheid. 'All models are wrong, but some are useful', zoals statisticus G.E.P. Box het zo mooi formuleerde.[1] Benaderingen spelen dus een belangrijke rol en daarmee zijn we terug bij het thema van dit stukje. Benaderd wordt niet alleen bij de vertaling van de werkelijkheid naar wiskunde, maar vaak ook tijdens het wiskundige oplossingsproces. Verschillende benaderingen kunnen leiden tot verschillende antwoorden, iets wat minder gebruikelijk is in de wiskundeles. In dit artikeltje wil ik u laten zien hoe dergelijke verschillen kunnen leiden tot nieuw inzicht.

Het modelleerprobleem en de eerste oplossing

Als opwarmertje in een cursus 'Wiskundig modelleren' voor leraren bekeken we de volgende klassieke modelleeropdracht:
Je staat op een toren van hoogte 100 meter. Hoe ver is de horizon?
Een dergelijke opgave staat in de laatste editie van *Getal & Ruimte* voor tweedeklassers. De leerlingen worden daar flink geholpen met de vertaling naar een wiskundig model; de leraren in de cursus werden daarentegen in het diepe gegooid. In een mum van tijd hadden zij de aarde gemodelleerd als perfecte bol, de toren als verlengde van een straal, en de lichtstraal van horizon naar het oog van de waarnemer als raaklijn door de top van de toren.
Natuurlijk wordt de bol gesneden met het vlak dat bepaald wordt door de toren en de lichtstraal, zodat we het meetkundige model van ***figuur 1*** krijgen.

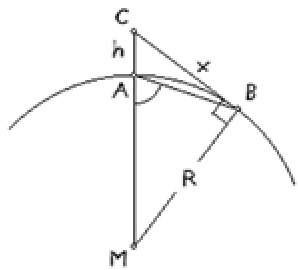


figuur 1

In figuur 1 hebben we, net als de meeste cursisten, het probleem gegeneraliseerd naar willekeurige torenhoogte h en planeetstraal R. Met Pythagoras vinden we:
$x^2 = (R + h)^2 – R^2 = 2Rh + h^2$, en dus:
$x = \sqrt{(2Rh + h^2)}$
In het oorspronkelijke probleem is h = 100 meter en $R \approx 40000$ km/$(2\pi) \approx 6366$ km. De term h^2 is dus verwaarloosbaar ten opzichte van $2Rh$ en we vinden:
$x \approx \sqrt{(2Rh)}$
(Snelle controle: de natuurkundige dimensie klopt, want de wortel van lengte maal lengte is inderdaad een lengte.) Voor h = 100 meter en R = 6366 km geeft dit voor x een kleine 40 km.
Klopt dit? Niet exact, natuurlijk. We hebben immers benaderd. Zelfs $x = \sqrt{(2Rh + h^2)}$ is een benadering. Weliswaar is dit de exacte oplossing van het wiskundige probleem, maar in de vertaling van context naar wiskunde zitten ook allerlei vereenvoudigingen. In werkelijkheid is mijn ooghoogte niet 100 meter, is de aarde niet volmaakt bolvormig, ligt de horizon niet op zeeniveau, is de lichtstraal geen perfect rechte lijn, enzovoorts.

De tweede oplossing en de paradox

Een tweetal cursisten had hetzelfde meetkundige model, maar een andere wiskundige oplossing. Zij redeneerden als volgt. De boog AB van de torenvoet A naar het raakpunt B op de horizon is een fractie van de aardomtrek, dus hoek AMB is heel klein. De boog AB is dus vrijwel gelijk aan de koorde AB. Hoek MAB is dus vrijwel recht; ***zie figuur 2***.



figuur 2

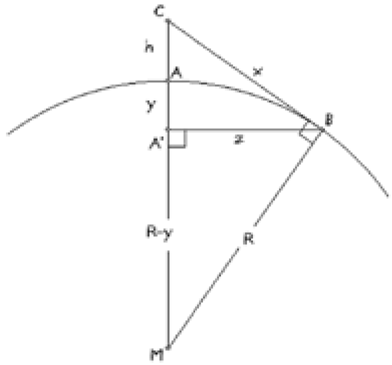
Anders gezegd, het punt A valt vrijwel samen met het voetpunt A' van de loodlijn uit B op AM. De driehoeken MBC en $BA'C$ zijn gelijkvormig (hh), dus de driehoeken MBC en BAC zijn bij benadering gelijkvormig. We vinden dus:
$x / h \approx (R + h)/x \approx R / x$, en dus:
$x \approx \sqrt{(Rh)}$
Vergeleken met de vorige oplossing is de gevraagde afstand x een factor $\sqrt{2}$ kleiner!

Welke oplossing is goed? Dat is een verkeerde vraag, want 'alle modellen zijn fout'. Welke oplossing is beter? Dat is de eerste, want dat is de exacte oplossing van het wiskundige model en zit daarom hopelijk dichter bij de werkelijkheid. Om dit laatste te controleren moet je x gaan opmeten, liefst voor verschillende waarden van h.
Het is natuurlijk niet verwonderlijk dat de benadering in het wiskundige gedeelte van de tweede oplossing tot een minder nauwkeurig antwoord leidt. Maar er is toch iets geks aan de hand, iets paradoxaals. Als we namelijk de toren steeds kleiner maken, dan wordt de hoek bij M steeds kleiner en de hoek bij A wordt 'steeds rechter'. Als h naar 0 gaat, gaat A' naar A. In de limiet voor h ® 0 zou het argument dan toch moeten kloppen? Toch blijft de factor $\sqrt{2}$ ook in die limiet gewoon bestaan! Hoe kan dat?

Wat doe je als docent met zo'n paradox? Je mag niet zeggen dat de tweede oplossing fout is, want benaderen mag (moet) bij modelleren. Bij modelleren is er niet één goed antwoord. Bovendien is de gevonden formule $x \approx \sqrt{(Rh)}$ zo slecht nog niet: de natuurkundige dimensie klopt en de orde van grootte klopt ook. Bij modelleren mag je soms best tevreden zijn met een voorspelling die 'slechts' 40% van de werkelijkheid afwijkt. Maar de paradox blijft natuurlijk knagen aan het wiskundig geweten: in de limiet voor h ® 0 zou het verschil tussen beide methodes moeten verdwijnen. Dat gebeurt niet, dus we zien iets fundamenteels over het hoofd. Dat kunnen we niet op ons laten zitten.

De oplossing van de paradox

Om de paradox te onderzoeken kijken we eerst eens naar het numerieke voorbeeld met $R = 6366$ km en $h = 100$ m.
De wiskundig correcte eerste oplossing geeft $x \approx 35{,}7$ km en dus ook $AB \approx x \approx 35{,}7$ km. Uit $\cos(BAM) = ½ \cdot |AB| \,/\, R$ volgt dan $\angle BAM \approx 89{,}84°$.
(Als u de benadering $AB \approx x$ niet vertrouwt, dan kunt u gebruik maken van de insluiting $x - h < AB < x$. Zowel de onder- als de bovengrens geeft $\angle BAM \approx 89{,}84°$.)
Dus $\angle BAM$ is inderdaad vrijwel een rechte hoek. Toch geeft de tweede methode 25 km voor x in plaats van 36 km. Hoe kan zo'n kleine fout in de hoek tot zo'n grote fout in de schatting voor x leiden?
Laten we het voorbeeld verder onderzoeken; ***zie figuur 3***. Waar ligt het voetpunt A' van B op de straal MA? We keren terug naar het algemene geval.



figuur 3

We schrijven y voor de afstand AA' en z voor $A'B$. Dan vind je:
$(h + y) : z : x = z : (R - y) : R$
Elimineer z, substitueer $x^2 = 2Rh + h^2$ en los op naar y. Het resultaat is:
$y = (Rh)/(R + h)$
(Er geldt blijkbaar een soort lenzenformule: $1/y = 1/R + 1/h$. Maar dat zijpad bewandelen we nu niet.) We vinden dus:
$h/y = (R + h)/R = 1 + h/R \approx 1{,}00002$
y is dus vrijwel gelijk aan h!
En nu zien we het probleem van de tweede benadering: in die benadering hebben we het verschil tussen $h = AC$ en $h + y = A'C$ verwaarloosd. Mag dat? Nee, dat mag niet! $AC = h$ is immers 100 meter, terwijl $A'C = h + y$ gelijk is aan 200 meter (op ongeveer 2 millimeter na). Een verschil van maar liefst een factor 2! De verwaarloosde afstand $y = AA'$ is weliswaar klein ten opzichte van de aardstraal R (en de gezochte afstand x), maar niet ten opzichte van de torenhoogte h! Dus, hoewel y slechts een luttele 100 meter meet, mogen we y toch niet verwaarlozen.
We kunnen nu trouwens de tweede methode verfijnen door h in de gevonden benadering $x \approx \sqrt{(Rh)}$ te vervangen door $h + y \approx 2h$. We vinden dan... $x \approx \sqrt{(2Rh)}$. Het klopt weer, de paradox is opgelost!

De moraal van het verhaal

Dit was een beetje technisch. Wat leert ons de oplossing van de paradox? Ik had tenslotte een fundamentele les beloofd.
Het is het volgende. De afstand $y = AA'$ is geen getal, maar een grootheid met een dimensie. De uitspraak 'y is klein' is dus betekenisloos. Is 100 meter klein? Meestal wel voor een astronoom, meestal niet voor een celbioloog. Het hangt er maar vanaf met welke referentielengte je het vergelijkt. Die referentielengte is niet de lengte van de beroemde platina staaf in Parijs, maar wordt bepaald door het probleem. In ons geval was dat h. De uitspraak 'y is klein ten opzichte van h' is wél zinvol (maar fout). Zelfs als je de context vergeet en de opgave als een puur meetkundesommetje ziet, dan nog is het handig om de natuurkundige dimensie 'lengte' erbij te denken. Het helpt om denkfouten als 'y is klein' te vermijden. Het is ook een handig middel (dimensieanalyse) om je algebra te controleren. Ik kan u dimensieanalyse trouwens ook warm aanbevelen bij de behandeling van formules voor lengtes, oppervlakten en inhouden van meetkundige objecten. Het werkt natuurlijk het beste als je niet met numerieke waarden, maar met variabelen werkt.
Het is reuze jammer dat dit soort elementair respect voor natuurkundige dimensies bij wiskunde meestal niet wordt aangeleerd, want je kunt er zelfs in de wiskunde veel gemak van hebben. Iedere natuurkundige leert dat meteen in het begin van de studie, maar de meeste Delftse derdejaars studenten toegepaste(!) wiskunde hebben het nooit geleerd. Gelukkig kunnen u en uw bèta-collega's in het voortgezet onderwijs alvast preventief het verzuim van de universitaire collega's helpen bestrijden.

Verwante problemen

Tot slot een paar verwante probleempjes. Hoe hoog is de 'berg' water tussen Stavoren en Enkhuizen? En tussen Nederland en Engeland? Hoe schaalt de hoogte h van de berg als functie van de afstand d? Hoe hangt dat samen met het horizonprobleem? En klopt de zeezeilersvuistregel $d = 2\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2}$ voor de afstand tot een vuurtoren die je net boven de horizon ziet, waarbij h_1 je ooghoogte is, h_2 de hoogte van de vuurtoren (beide in meter) en d de afstand in zeemijlen (1 zeemijl is 1,852 km). En als laatste, hoe bepaalde Aristarchos meer dan tweeduizend jaar geleden de verhouding $z : m$, waarbij z de afstand tot de zon en m de afstand tot de maan is? En waarom zat hij er zo ver naast?
En wat heeft Aristarchos' probleem eigenlijk te maken met het bovenstaande artikel?

Noot (Red.)

[1] G.E.P. Box (1979): *Robustness in the strategy of scientific model building*. In: R.L. Launer, G.N. Wilkinson (eds.): *Robustness in Statistics*. New York: Academic Press; p. 202.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft.
E-mailadres: *J.G.Spandaw@tudelft.nl*

Aankondiging / Wiskunde C conferentie

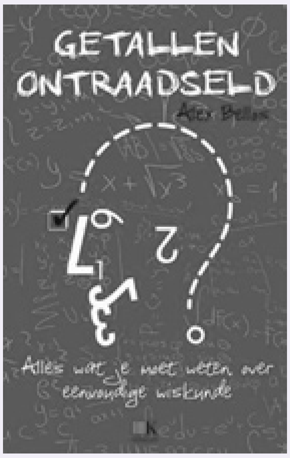
De vernieuwingscommissie cTWO organiseert op **vrijdag 4 maart 2011**, op een nog nader te bepalen passende locatie in Utrecht, voor vo-docenten en andere belangstellenden, een *Wiskunde C conferentie*.
Aanleiding is het compleet vernieuwde examenprogramma voor het vak wiskunde C zoals dat volgens plan met ingang van 2014 landelijk zal worden ingevoerd. Dit programma is volledig toegesneden op de belangstelling en mogelijkheden van de vwo-leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij.

De eerste ervaringen, zoals die het afgelopen cursusjaar 2009-2010 zijn opgedaan bij leerlingen en docenten van de pilotscholen, zijn dusdanig veelbelovend dat cTWO dit onder de aandacht van alle vo-docenten wil brengen. Temeer omdat in het huidige 2007 programma 60 slu beschikbaar zijn in de vorm van Keuzeonderwerpen, zodat hierbinnen onderdelen uit het vernieuwde programma uiterst goed inzetbaar zijn.
Ook zal op deze dag aandacht besteed worden aan allerlei praktische en organisatorische zaken rondom het vak wiskunde C.
De globale opzet van de dag bestaat uit plenaire lezingen aan het begin en eind van de dag en daartussen een aantal workshops met medewerking van o.a. pilotdocenten en wellicht hun leerlingen.

Aanmelding
Het complete programma en definitieve locatie zal binnenkort bekend worden gemaakt. De toegang is gratis, dus noteer **4 maart 2011** alvast in uw agenda!
We willen u er wel op wijzen dat men zich van te voren dient op te geven. Dat kan via een digitaal aanmeldingsformulier op: *www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeC/ProgrammaCdag2011.html*

cTWO projectteam
Theo van den Bogaart, Hielke Peereboom en Peter van Wijk

Verschenen / Getallen ontraadseld



Ondertitel: Alles wat je moet weten over wiskunde
Auteur: Alex Bellos
Illustraties: Andy Riley
Oorspronkelijke titel: Alex's Adventures in Numberland
Vertaling uit het Engels: Pieter Janssens en Rob Ridder
Uitgever: Kosmos Uitgevers, Utrecht (2010)
ISBN: 978 90 2153570 8
Prijs: € 19,95 (432 pagina's; paperback)

Van de achterkant – Alex Bellos legt in *Getallen ontraadseld* met passie de basisprincipes van wiskunde uit. Hij zet alles over wiskundige formules, statistiek en symbolen helder op een rij. Door zijn enthousiaste aanpak weet hij de veelvoorkomende angst voor getallen weg te nemen. Hij laat zien dat het bij wiskunde vooral gaat om creatief denken en beschrijft hoe wiskunde ook in andere disciplines in het leven van belang is. Wiskunde is leuk!

Over de schrijver – Alex Bellos is journalist met een passie voor wiskunde en filosofie. Hij schrijft sinds jaren columns over alledaagse wiskunde in *The Guardian*.

Recensie (JPK in *KijK* 9/2010) – Soms denk je bij de titel van een vertaald boek: 'Hè jammer'. Bijvoorbeeld bij *Getallen ontraadseld* van de Brit Alex Bellos, vooral vanwege de ondertitel: Alles wat je moet weten over wiskunde.
Ook de flaptekst doet vermoeden dat het hier een soort stoomcursus wiskunde betreft, waar je je plichtsmatig doorheen ploegt omdat de in dit boek samengebalde kennis nu eenmaal bij je algemene ontwikkeling hoort. Maar als je *Getallen ontraadseld* eenmaal gaat lezen, blijkt het een vlot geschreven, razend interessant boek dat alle hoeken van de wereld verkent en door de hele geschiedenis springt. Uiteraard is wiskunde daarbij de rode draad, maar Bellos weet als geen ander wat leuk is voor de geïnteresseerde leek en wat niet. Reken dus op informatie over indianenstammen die geen telwoorden voorbij de vier hebben, over Japanners die met duizelingwekkende snelheid hun telramen gebruiken, over pi-fanaten die met elkaar wedijveren wie het grootste aantal decimalen kan opzeggen… Natuurlijk wordt er hier en daar wel wat rekenwerk gevraagd van de lezer, maar ook dan weet Bellos het luchtig te houden. Kortom: een veel leuker boek dan de kaft doet vermoeden.
Wel jammer dat in hoofdstuk zeven ('De geheimen van de opeenvolging') in de Nederlandse vertaling consequent het woord *reeks* wordt gebruikt, terwijl de auteur het duidelijk over *rijen* heeft – een fout waar iedere enigszins wiskundig onderlegde lezer over zal vallen.

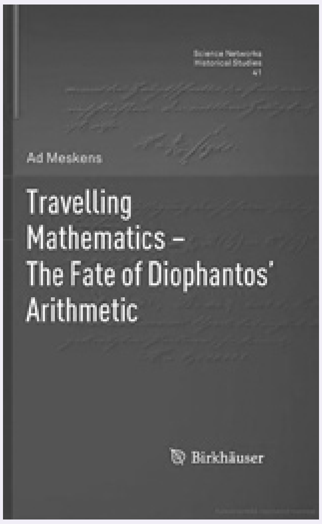
Verschenen / Pythagoras en de rechtvaardige rechters

Auteur: Jan Helmer
Uitgever: Pythagoras Project (2010)
Website: www.pythagorasproject.nl
ISBN: 978 90 8118432 8
Prijs: € 16,90 (224 pagina's; hard cover)

De mythe van het eerste boek, *Het Mysterie van Pythagoras*, leeft in *Pythagoras en de Rechtvaardige Rechters* voort. Het nieuwe boek bestaat uit verschillende lagen.
Door het spannende verhaal komen hier en daar in grijze kadertjes de Statistiek en het Rekenen met Kansen naar boven. (Het is daarom een aanrader voor iedere bovenbouwleerling.) Daaronder ligt het schilderij van de gebroeders van Eyck: Het Lam Gods. Dit altaarstuk is op zich al een verhaal en levert de hoofdpersonen van het boek alle aanwijzingen die nodig zijn voor hun missie. En door alle lagen heen komen we bij de kern: De Rechtvaardige Rechters, dat vroeger ook wel Rechtvaardige Bestuurders heette. Het is de naam van een in 1934 gestolen paneel dat nooit is teruggevonden.

Het 224 bladzijden tellende boek met een voorwoord van Ionica Smeets (Wiskundemeisjes) is een oproep aan alle bestuurders.
Pythagoras en De Rechtvaardige Rechters is geschikt voor 12 jaar en ouder met of zonder wiskundeknobbel en maakt ons nog eens duidelijk (om met Churchill te spreken), dat je alleen de statistiek die jezelf hebt gemanipuleerd, kunt vertrouwen.
Het boek verschijnt samen met '10 voor Pythagoras', het kaartspel dat de rekenvaardigheid stimuleert..

Verschenen / Travelling Mathematics



Ondertitel: The Fate of Diophantos' Arithmetic
Auteur: Ad Meskens
Uitgever: Birkhäuser (2010)
ISBN: 978 3 034606424
Prijs: € 89,95 (208 pagina's; 13 illustraties; hard cover)

Travelling Mathematics vertelt het verhaal van Diophantos' Arithmetika.
De Arithmetika is een zeer intrigerend boek dat zowel algebraïsch als getaltheoretisch kan worden geïnterpreteerd. Tot de jaren '70 van de vorige eeuw waren slechts zes van de dertien boeken (hoofdstukken) waaruit de Arithmetika bestaat, in een Griekse versie bekend. De ontdekking van vier boeken in een Arabische vertaling gaf ons een dieper inzicht in het algebraïsche kunnen van de Grieken.
Het boek werd onsterfelijk door Fermat's kantlijnkrabbels, die onder andere aanleiding gaven tot zijn bekende Laatste Stelling.

Oproep / Aankondiging activiteiten

Bent u betrokken bij de organisatie van nascholing, een masterclass of een andere wiskundeactiviteit voor docenten of leerlingen?
De redactie van *Euclides* ontvangt, evenals de redactie van de *WiskundE-brief*, graag zo spoedig mogelijk relevante gegevens – ook over de financiële bijdrage die gevraagd wordt – en een (wervend) conceptstukje.
In de meeste gevallen wordt een dergelijke aankondiging kosteloos, maar éénmalig, in *Euclides* geplaatst. Opname in de Kalender van de datum (data) en een korte omschrijving van de activiteit kan bij vroegtijdige inzending meerdere keren plaats vinden.

E-mailadres redactie *Euclides*:
redactie-euclides@nvvw.nl
Zie met betrekking tot plaatsing in *Euclides* eventueel « *www.nvvw.nl/page.php?id=788* » (Inzenden artikelen en mededelingen), en voor de verschijningsdata en deadlines van *Euclides* pag. 140 in dit nummer.

E-mailadres WiskundE-brief:
redactie@wiskundebrief.nl

PUZZEL 86-3

Partities van S met product ook S

Het is u vast wel al eens opgevallen dat $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$. In zekere zin is deze identiteit uniek want er zijn geen andere opvolgende getallen waarvan som en product gelijk zijn, behalve flauwiteiten als $(-1) + 0 + 1 = (-1) \times 0 \times 1$. Om hier van af te zijn, beperken we ons tot positieve gehele getallen.
Als de getallen niet opvolgend hoeven te zijn, en we alleen vragen naar n getallen ($n > 1$) waarvan product P en som S aan elkaar gelijk zijn, dan is er voor iedere n een oplossing, namelijk n, 2, gevolgd door (n – 2) enen. Inderdaad zijn er n termen en $P = S = 2n$.
De volgorde van deze getallen speelt nu geen rol meer; daarom noteren we ze in niet-stijgende volgorde, zoals gebruikelijk bij partities.
Het is soms handig om voor deze rijtjes ook de partitie-notatie te gebruiken. Hierbij wordt het aantal keren dat een getal voorkomt, aangegeven door een ‘super-script’. Bovenstaande rij ziet er dan als volgt uit:
$n, 2, 1^{n-2}$
Het wordt interessanter als we ons afvragen of er naast bovengenoemde ‘standaard-oplossing’ nog andere zijn. Dat probleem hoorde ik lang geleden bij een lezing, en zo af en toe duikt het weer op. Een eenvoudig geval met een tweede oplossing is $n = 5$ met de partitie 3, 3, 1, 1, 1.
Merk op dat $P = S = 9$, in plaats van 10. Het is hier inderdaad niet van belang om een bepaalde waarde van $P = S$ te bepalen; het gaat alleen om n, het aantal termen van de partitie.
Een tweede oplossing bestaat voor heel veel waarden van n. Bovendien kan het aantal oplossingen willekeurig groot worden. Dit blijkt al bij een geslaagde uitwerking van de volgende opgave.

Opgave 1
Karakteriseer de waarden van n waarvoor een tweede partitie van n bestaat van de vorm $a, b, 1^{n-2}$ met $a \geq b > 2$ en $P = S$.

Als u dit heeft opgelost, zijn er nog twee soorten waarden van n over:
(A) n waarvoor een tweede oplossing bestaat van een andere vorm, en
(B) n waarvoor geen tweede oplossing bestaat.
Tot deze laatste categorie behoren 2, 3, 4, 6, 24, 114, 174 en 444. Het is niet bekend of er nog meer zijn, maar áls ze er zijn, dan zijn ze groter dan 13587782064.
Dit getal staat ook in de *On Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

Een tijdje geleden heb ik me tot taak gesteld om voor alle getallen < 100 uit categorie A een tweede oplossing te bepalen. Dat is gelukt, en er zitten een paar lastige gevallen bij. Die ga ik nu aan u voorleggen!

Opgave 2
Bepaal een tweede oplossing met $P = S$ voor n = 12, 48, 72 en 84.
(De eerste is niet eens zo heel lastig; die is om er in te komen.)

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 25 januari 2011.
Veel plezier!

OPLOSSING 86-1

Cijfersommen

Er waren deze keer 21 oplossers. Helaas heb ik niet meer dan acht keer de maximale score kunnen toekennen. Maar ik heb veel waardering voor degenen die, bijvoorbeeld door tijdgebrek, alleen opgave 1 hebben opgelost en toch hebben ingestuurd.

De vijf 'wortels' bij *opgave 1* zijn 8, 17, 18, 26 en 27. Dit is heel goed zonder computer te doen, vooral als je eerst nagaat welke restklassen modulo 9 van n in aanmerking komen.

Opgave 2 is puur wiskundig. De restklasse modulo 6 van k bepaalt welke waarden n^k (mod 9) kan aannemen in een oplossing. Dit hangt samen met de volgende stelling van Euler:
$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ tenzij $a \equiv 0 \pmod m$
Uit $\phi(9) = 6$ volgt dan dat DS(n^k) periode 6 heeft voor vaste n.
Het is dus voldoende om de restklassen 0, 1, …, 5 (mod 6) van k te bekijken. ***Uit tabel 1*** blijkt dat bij $k \equiv 1$ (mod 6) het grootste aantal restklassen van n optreedt waarvoor een oplossing kán bestaan.
Het is dan verder min of meer een loterij of er inderdaad een oplossing is.

k (mod 6)	n (mod 9)
0	0, 1
1	0, 1, 2, 4, 5, 7, 8
2	0, 1
3	0, 1, 8
4	0, 1, 4, 7
5	0, 1, 8

tabel 1

Opgave 3 – Dit is typisch een opgave die alleen met de computer kan, en wel met een programma dat zeer grote getallen kan verwerken. Het blijkt dat er oplossingen zijn voor k = 1, …, 100. Menigeen zal geneigd zijn aan te nemen dat het zo ook verder gaat. Maar de aantallen blijven sterk fluctueren en af en toe is er slechts één oplossing; dus je zou toch kunnen vermoeden dat het een keer ophoudt. Inderdaad is er voor k = 105 geen oplossing. Velen gaven ook een aantal grotere waarden van k zonder oplossing.
Deze opgaven zijn blijkbaar ook al door anderen bedacht. Het probleem staat namelijk op Internet, met de oplossing van opgave 3 er bij! Ik hoop maar dat de oplossing van de nieuwe opgaven niet ook op Internet staat!

Ladderstand
De kop van de ladder:
L. v.d. Raadt 558
J. Hanenberg 474
T. Kool 471
H. Linders 417
H. Bakker 403
K. Verhoeven 364
W. v.d. Camp 356
K. v.d. Straaten 344
H.J. Brascamp 332
J. Remijn 304

De winnaars van de kerstprijzen (boekenbonnen van resp. € 20,00 en € 15,00) zijn Lieke de Rooij en Harm Bakker. Van harte gefeliciteerd!

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/page.php?id=1779*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/page.php?id=7450*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	8 februari 2010	7 dec 2010
5	29 maart 2011	1 feb 2011
6	17 mei 2011	18 mrt 2011
7	28 juni 2011	3 mei 2011

zaterdag 8 januari 2011, Utrecht
KWG-Wintersymposium 2011
Organisatie KWG
Zie pag. 70 in nummer 86-2.

t/m zo. 16 januari, Vianen
Beleef Vianen in 3D
Organisatie Stedelijk Museum Vianen

maandag 17 januari, Delft
Conferentie: Beter bèta op het havo
Organisatie APS
Zie ook pag. 135 in dit nummer.

wo. 19 t/m vr. 21 januari, Noordwijkerhout
29e Panama Conferentie
Organisatie FIsme

di. 25 t/m za. 29 januari, Utrecht
Nationale Onderwijstentoonstelling (NOT 2011)
Organisatie VNU Exhibitions Europe
Zie pag. 125 in dit nummer.

vr. 28 en za. 29 januari, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

maandag 31 januari, Utrecht
9e Wiskundeconferentie vmbo en onderbouw havo/vwo
Organisatie APS

vrijdag 4 februari, op aangemelde scholen
1e ronde Wiskunde Olympiade
Stichting NWO

zaterdag 12 februari 2011
Startbijeenkomst Platform Wiskunde Nederland (PWN)
Organisatie KWG en NVvW

vrijdag 4 maart, Utrecht
Wiskunde C conferentie
Organisatie cTWO
Zie pag. 134 in dit nummer.

maandag 7 maart, Utrecht
Studiedag: De TI-Nspire en het digibord
Organisatie APS

donderdag 17 maart, op aangemelde scholen
Kangoeroe-wedstrijd 2011
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

do. 17 en vr. 18 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie FIsme

dinsdag 29 maart, Utrecht
Rekenvaardigheid door samenhangend leren
Organisatie APS

maandag 11 april, Utrecht
Wiskunde ICT-conferentie: onderzoek en praktijk
Organisatie APS

CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf.

2e t/m 6e graads vergelijkingen
2e machtswortels in natural output.

Normale verdeling met grafiek (of tabel) Bereken sigma bij kans =0,5.

SolveN in menu RUN geeft meerdere antwoorden; soms wel 10.

CASIO FX-9860GII

Dé snelste grafische rekenmachine met tekstboek display.

CASIO FX-82ES

Dé wetenschappelijke rekenmachine met tekstboek display.

Op de Natural Textbook Display worden onder andere breuken en wortels weergegeven, zoals in het leerboek.
De FX-82ES is ook perfect geschikt voor het gebruik van tabellen.

3 jaar garantie

Docentenexemplaar?

Vraag naar de speciale actie:
via e-mail verkoop@casio.nl

CASIO dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio.nl